実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に３回しか乗ったことがない人と 300 回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう !!

堺　義明

高３　トップレベル数学ⅠAⅡB （前期）

目　次

第１講　２次方程式の解の配置
第２講　絶対値付き２次方程式の解の個数
第３講　加法定理について…
第４講　三角関数の合成（応用編）
第５講　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の求め方
第６講　桁数などの計算
第７講　３次の極値などについて
第８講　接線の本数と実数解の個数
第９講　置き換えて３次，解の個数など
第10講　面積の公式
第11講　絶対値付き積分
第12講　試行錯誤の数列
第13講　応用漸化式
第14講　漸化式の応用
第15講　漸化式と一般項の予想
第16講　数列の和と一般項
第17講　和について
第18講　確率と数列
第19講　数学的帰納法
第20講　ベクトルでの計算
第21講　球の取り扱い
第22講　三角形の五心とベクトル
第23講　ベクトルの利用法
第24講　空間での垂線の足

第１講　２次方程式の解の配置

1　次の各問いに答えよ.

(1)　x の 2 次方程式 $x^2-2(a+2)x+a^2=0$ が $1<x<2$ に少なくとも 1 つ実数解をもつような a の値の範囲を求めよ.

(2)　x の 2 次方程式 $x^2-2(a+2)x-6a=0$ が $1<x<2$ に少なくとも 1 つ実数解をもつような a の値の範囲を求めよ.

＜ Note ＞

第1講　2次方程式の解の配置

1　k を実数の定数とする．x の2次方程式 $x^2-2kx-k^2+2k=0$ が $0<x\leqq 2$ に少なくとも1つ実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．

【選択肢】

㋐　$-1-\sqrt{5}\leqq k<0,\ 1<k<2$

㋑　$-1-\sqrt{5}<k\leqq 0,\ 1<k<2$

㋒　$-1-\sqrt{5}\leqq k<0,\ 1\leqq k<2$

＜ Note ＞

第2講　絶対値付き2次方程式の解の個数

2　a と b は実数の定数として，次の各問いに答えよ．

(1)　x の方程式 $x^2-4|x-1|+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(2)　x の方程式 $|x^2-4|-ax-3a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(3)　x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど2個だけもつような a と b の条件を求め，それを ab 平面に図示せよ．

＜ Note ＞

第２講　絶対値付き２次方程式の解の個数

2　関数 $f(x)=x^2+x-5|x-1|$ について，$f(x)=k$（k は定数）の異なる実数解の個数を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\begin{cases} 4 & (0 \leqq k \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (-15<k<0,\ k>1 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=-15 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<-15 \text{ のとき}) \end{cases}$

㋑ $\begin{cases} 4 & (1<k<2 \text{ のとき}) \\ 3 & (k=1,\ 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (-14<k<1,\ k>2 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=-14 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<-14 \text{ のとき}) \end{cases}$

㋒ $\begin{cases} 4 & (1 \leqq k \leqq 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (-14<k<1,\ k>2 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=-14 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<-14 \text{ のとき}) \end{cases}$

＜ Note ＞

第３講　加法定理について…

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\cos\frac{2}{7}\pi$ の小数第１位の数が６であることを示せ．

(2)　n を自然数とするとき

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

であることを示せ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

＜ Note ＞

第３講　加法定理について…

3　n を自然数とするとき

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

であることを示せ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

＜ Note ＞

第４講　三角関数の合成（応用編）

4　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(\theta)=\sin\theta+a\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．ただし，a は実数の定数とする．

(2)　関数 $f(\theta)=(\sqrt{3}-1)\sin\theta+(\sqrt{3}+1)\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(3)　関数 $f(\theta)=8\cos^3\theta+4\sin^3\theta-6\cos\theta-3\sin\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

＜ Note ＞

第４講　三角関数の合成（応用編）

4　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき関数 $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}+x^2-1$ のとり得る値の範囲を求めよ．

【選択肢】

㋐　$-1 \leqq f(x) \leqq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　㋑　$-1 \leqq f(x) < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　㋒　$-1 < f(x) \leqq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

＜ Note ＞

第5講　$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ の求め方

5　$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$\cos 3\theta=\cos 2\theta$ であることを示し，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=\theta$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$ を満たす三角形 ABC において，$\angle\mathrm{B}$ の二等分線と辺 AC の交点を D とする．CD の長さを利用して $\cos\theta$ の値を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{x_j}=(\cos j\theta,\ \sin j\theta)$ $(j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ を考えることにより，$\cos\theta$ の値を求めよ．

< Note >

第5講　$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ の求め方

5　次の空欄を適切な数でうめよ．

$\sin 36^\circ = a$ とおくと

$$\cos 72^\circ = \boxed{} - \boxed{}\,a^2$$

$$\sin 108^\circ = -\boxed{}\,a^3 + \boxed{}\,a$$

であり

$$\sin 180^\circ = \boxed{}\,a^5 - 20a^3 + \boxed{}\,a$$

となる．これより

$$a = \sqrt{\frac{5-\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}}$$

を得る．

【選択肢】

㋐　上から順に　2，4，3，16，5，5，8，1

㋑　上から順に　1，2，4，3，16，5，5，8

㋒　上から順に　16，5，5，8，1，2，4，3

< Note >

第６講　桁数などの計算

6　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，次の各問いに答えよ．

(1)　2^{100} の桁数，最高位の数，一の位の数をそれぞれ求めよ．また最高位から 2 番目の位の数は何かを答えよ．

(2)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$ は小数第何位にはじめて 0 でない数が現れるかを求めよ．またその数は何かを答えよ．

(3)　$2^{130}+3^{82}$ の桁数，最高位の数をそれぞれ求めよ．

(4)　7^{62} の桁数，最高位の数をそれぞれ求めよ．ただし，必要ならば $7^4=2401$，$3^5=243$ であることを用いよ．

< Note >

第6講　桁数などの計算

6　近似値 $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ を利用して次の問いに答えよ.

(1)　18^{35} の桁数を求めよ.

(2)　18^{35} の最高位の数を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐　43 桁　㋑　44 桁　㋒　45 桁　　(2)　㋐　6　㋑　7　㋒　8

＜ Note ＞

第７講　３次の極値などについて

7　2つの関数を $f(x)=x^3+3x^2-3x-4$ と $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とし，$g(x)$ は $x=\alpha$ で極大値 M，$x=\beta$ で極小値 m をとるとする．次の各問いに答えよ．

(1)　$M+m=2g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ であることを示せ．

(2)　$M-m=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ．

(3)　$f(x)$ の極大値と極小値，それらの和，差をそれぞれ求めよ．

< Note >

第７講　３次の極値などについて

7　a は 0 でない実数とする．関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となるような a の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a=\pm 1$　　㋑　$a=\pm\frac{1}{2}$　　㋒　$a=\pm 2$

< Note >

第８講　接線の本数と実数解の個数

8　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq0)$ とする．曲線 C_1：$y=f(x)$ について，点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を l_p，点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線を l_q とする．$p\neq q$ のとき，l_p と l_q が一致することはないことを示せ．

(2)　曲線 C_2：$y=x^4-2x^3-3x^2+3x+5$ に対し，曲線上の異なる 2 点における接線が一致しているという．この 2 点の x 座標を求めよ．

＜ Note ＞

第8講　接線の本数と実数解の個数

8　点 $(X,\ Y)$ から曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ に引いた接線の本数を求めよ.

【選択肢】

㋐
1 ：$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$
または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

2 ：$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$ のとき

3 ：$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$
または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

㋑
1 ：$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$
または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

2 ：$X\neq -\dfrac{b}{3a}$ かつ
「$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

3 ：$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$
または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

㋒
1 ：$X=-\dfrac{b}{3a}$
または「$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$」
または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

2 ：$X\neq -\dfrac{b}{3a}$ かつ
「$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

3 ：$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$
または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

＜ Note ＞

第９講　置き換えて３次，解の個数など

9　次の各問いに答えよ．

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とするとき，$f(\theta)=4\cos 2\theta \sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．また，方程式 $f(\theta)=k$ が異なる 4 個の実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．さらに，その k の最小値を k_1 とするとき，$f(\theta)=k_1$ $(0 \leqq \theta \leqq \alpha < 2\pi)$ の異なる実数解の個数が 3 となるような α の値の範囲を求めよ．

(2)　k を実数の定数とするとき，方程式 $x^6-6x^5+12x^4-(k+12)x^3+12x^2-6x+1=0$ の異なる実数解の個数の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

第9講　置き換えて3次，解の個数など

9　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において定数 a がいろいろな値をとるとき，
方程式 $2\sin 3\theta - 2\cos 2\theta - 1 = a$ の解の個数がどのように変わるかを調べよ．

【選択肢】

㋐
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a > 3 \text{ のとき}\right) \\ 1 & (a = 3 \text{ のとき}) \\ 2 & \left(\dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} \leqq a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 5 & (a = -1 \text{ のとき}) \\ 6 & \left(-1 < a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

㋑
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a \geqq 3 \text{ のとき}\right) \\ 2 & \left(a = \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} < a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 6 & \left(-1 \leqq a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27}\right) \end{cases}$$

㋒
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a > 3 \text{ のとき}\right) \\ 1 & (a = 3 \text{ のとき}) \\ 2 & \left(a = \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} < a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 5 & (a = -1 \text{ のとき}) \\ 6 & \left(-1 < a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

< Note >

第 10 講　面積の公式

10　次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 $C：y=|x(x-1)|$ と直線 $l：y=kx$（k は定数）に関して，C と l が $x>0$ の範囲で異なる 2 つの交点をもつとする．このとき，C と l によって囲まれる図形全体の面積を最小にする k の値とその面積の最小値を求めよ．

(2)　曲線 $C：y=x^4+px^2+qx+r$ と直線 $l：y=ax+b$ が異なる 2 点で接する条件を求めよ．また，このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を p で表せ．ただし，p，q，r，a，b は実数の定数とする．

＜ Note ＞

第10講　面積の公式

10　座標平面上で原点を通る直線と $y=x|x+2|$ のグラフが相異なる3点で交わっている．このグラフと直線によって囲まれる図形で，この直線より下側にあるものの面積を S_1，上側にあるものの面積を S_2 とする．$S_1:S_2=9:8$ となるとき，この直線の傾きを求めよ．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{8}{9}$　㋑ $\dfrac{1}{2}$　㋒ $\dfrac{1}{3}$

＜ Note ＞

第11講　絶対値付き積分

11 次の各問いに答えよ.

(1) $f(x)=\int_0^x |t(t-x^2)|dt$ とする. $f(x)$ を求めよ.

(2) $g(x)=\int_0^1 |xt-1|dt$ とする. $g(x)$ を求めよ.

(3) $h(x)=\left|x^2-\int_0^1 h(t)dt\right|$ を満たす関数 $h(x)$ を求めよ.

＜ Note ＞

第11講　絶対値付き積分

11　$f(t)=\int_0^1|x^2-2tx|dx$ とおくとき，$f(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$t=0$，最小値 $\frac{1}{3}$　㋑　$t=\frac{1}{4}$，最小値 $\frac{1}{8}$　㋒　$t=\frac{\sqrt{2}}{4}$，最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

< Note >

第12講　試行錯誤の数列

12　次の各問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ は $a_1=0$，$a_2=1$ を満たし，$n \geqq 2$ に対して $a_n=k$ とするとき

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_{n-k}=a_n \text{ のとき}) \\ a_n & (a_{n-k}\neq a_n \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されるものとする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n \geqq 2012$ を満たす最小の自然数 m を求めよ．

(2)　l，n，d を自然数とする．このとき自然数の積 $(2l+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて

$$(2l+1)nd=\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}$$

と表せることを証明せよ．

< Note >

第 12 講　試行錯誤の数列

12　実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す．$a_m=[\sqrt{m}]$（$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）に対して，数列 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots$ を $b_1=0$，$k\geqq 2$ のとき $a_m<k\leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k=m$ と定める．次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対して

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m+\sum_{k=1}^{n} b_k=n^3$$

が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]$ を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$b_k=k^2-1$　　㋑　$b_k=k^2$　　㋒　$b_k=k^2+1$

(3)　㋐　$\frac{1}{6}n(4n^2-6n+8)$　　㋑　$\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$　　㋒　$\frac{1}{6}n(4n^2+3n-1)$

＜ Note ＞

第 13 講　応用漸化式

13　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_{n+1}=2a_n+3b_n$，　$b_{n+1}=a_n+2b_n$，　$a_1=b_1=1$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n+6}{a_n+2}$，　$a_1=3$

(3)　$a_{n+2}-2a_{n+1}-8a_n=9$，　$a_1=0$，　$a_2=1$

＜ Note ＞

第13講　応用漸化式

13　次の各問いに答えよ．

(1)　次の文中の あ ～ え にあてはまる数や式を答えよ．

$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-9}{a_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ には次の関係式が成り立つ．

$$\frac{1}{a_{n+1}-\boxed{あ}}=\frac{\boxed{い}}{a_n-\boxed{あ}}+\frac{1}{\boxed{う}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

これより，一般項 a_n は，$a_n=$ え となる．

(2)　次式

$$\begin{cases} a_1=1 \\ b_1=-1 \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} a_{n+1}=4a_n-2b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が定義されているとする．すべての自然数 n に対し $a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$ を満たす定数 p，q を2組求めることによって，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　(あ)　1，(い)　2，(う)　3，(え)　$\dfrac{n+3}{2n+1}$

㋑　(あ)　2，(い)　3，(う)　2，(え)　$\dfrac{2n+5}{n+2}$

㋒　(あ)　3，(い)　1，(う)　4，(え)　$\dfrac{3n+7}{n+1}$

(2)　㋐　$(p,\ q)=(-2,\ 2)$，$(-1,\ 3)$，$a_n=4\cdot3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}$，$b_n=2\cdot3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}$

㋑　$(p,\ q)=(2,\ -2)$，$(1,\ -3)$，$a_n=4(-3)^{n-1}-3(-2)^{n-1}$，$b_n=2(-3)^{n-1}-3(-2)^{n-1}$

㋒　$(p,\ q)=(2,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$a_n=4\cdot3^{n-1}-3(-2)^{n-1}$，$b_n=2\cdot3^{n-1}-3(-2)^{n-1}$

< Note >

第 14 講　漸化式の応用

14　次の各問いに答えよ．

(1)　A 銀行の住宅ローンは，最初の 10 年間の金利が年利率 3％ で，残りの期間の金利が年利率 5％ であり，B 銀行の住宅ローンは，全期間の金利が年利率 4％ である．ある人が A 銀行と B 銀行からそれぞれ 1000 万円ずつを住宅ローンで借りて，1 年後から毎年 60 万円ずつ返済するとき，20 年後のそれぞれの残高を求めよ．

ただし，A 銀行と B 銀行の住宅ローンでは，ある年の残高は前年の残高に金利分 (＝残高×年利率) を加えて，返済分を引いたものである．また，$1.03^{10}=1.34$，$1.04^{10}=1.48$，$1.05^{10}=1.63$，$1.03^{20}=1.81$，$1.04^{20}=2.19$，$1.05^{20}=2.65$ として計算せよ．

(2)　関数 $f_n(x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は

$$f_1(x)=4x^2+1$$

$$f_n(x)=3x^2\int_0^1 tf'_{n-1}(t)\,dt+3\int_0^1 f_{n-1}(t)\,dt \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で，帰納的に定義されている．この $f_n(x)$ を求めよ．

＜ Note ＞

第 14 講　漸化式の応用

14　ある会社が，プロ野球のハチロー選手に対して，公式戦で二塁打を 1 本打つとそのたびに 10 万円の賞金を出すこととした．そこでハチロー選手は

(I)　1 本目については賞金の 40 %

(II)　n 本目 $(n \geqq 2)$ については，$n-1$ 本目までの賞金総額のうち手元に残った金額と n 本目の賞金 10 万円との合計の 40 %

を慈善事業への寄付金にあてることとした．ハチロー選手は手元に残った賞金には手をつけないものとする．寄付金の合計額がはじめて 100 万円を超えるときの二塁打の総本数を求めよ．

【選択肢】

㋐　10 本　　㋑　11 本　　㋒　12 本

＜ Note ＞

第15講　漸化式と一般項の予想

15　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項はどう予想できるか．

(1)　$a_{n+1}=-2a_n+1$,　$a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=2a_n+2n-4$,　$a_1=1$

(3)　$a_{n+1}=3a_n+2^n$,　$a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=4a_n+4^n$,　$a_1=1$

(5)　$a_{n+2}-2a_{n+1}-8a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

(6)　$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

＜ Note ＞

第 15 講　漸化式と一般項の予想

15　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項はどう予想できるか.

(1)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$,　$a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=3a_n+2n-1$,　$a_1=1$

(3)　$a_{n+1}=4a_n+3^n$,　$a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=2a_n+2^n$,　$a_1=2$

(5)　$a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=6$

(6)　$a_{n+2}+6a_{n+1}+9a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

【選択肢】

(1)　㋐　$\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$　㋑　$2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　㋒　$\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

(2)　㋐　$2\cdot3^{n-1}-n$　㋑　$2\cdot3^n-2n-3$　㋒　$3^{n-1}-n+1$

(3)　㋐　$-2\cdot4^{n-1}+3^n$　㋑　4^n-3^n　㋒　$4^n-3^{n-1}-3$

(4)　㋐　$n2^n$　㋑　$(n+3)2^{n-3}$　㋒　$(n+1)2^{n-1}$

(5)　㋐　$2^{n-1}-(-4)^{n-1}$　㋑　$3\cdot2^{n-1}-2(-4)^{n-1}$　㋒　$2^{n+1}+(-4)^n$

(6)　㋐　$(n-1)(-3)^{n-1}$　㋑　$(n-1)(-3)^{n-2}$　㋒　$(n-1)(-3)^n$

< Note >

第16講　数列の和と一般項

16　次の各問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{4^k}a_k=\frac{3n^2+n}{2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとする．このとき a_n を求めよ．また，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ．

(2)　次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1=1,\ \frac{2^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n+1}a_ka_{n+2-k}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

< Note >

第16講　数列の和と一般項

16　任意の自然数 n に対して，関係式

$$3a_{n+1}=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_1$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ について，$a_1=1$ のとき，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ について $S_{2m}<\frac{39}{32}$ が成り立つような自然数 m の最小値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$m=8$　　㋑　$m=6$　　㋒　$m=4$

＜ Note ＞

第17講　和について

17　次の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+l)$　(l は自然数)

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^k$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-2)2^k}{k(k+1)(k+2)}$

＜ Note ＞

第17講　和について

17　次の和を求めよ.

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 2^k$

【選択肢】

(1)　㋐　$\sqrt{n+1}-1$　㋑　$\sqrt{n+2}-1$　㋒　$\sqrt{n}-1$

(2)　㋐　$(n^2-2n+3)2^n-2$　㋑　$(n^2-2n+3)2^{n+1}-6$　㋒　$(n^2-2n-3)2^n+10$

＜ Note ＞

第18講　確率と数列

18　次の各問いに答えよ．

(1)　赤玉2球，白玉8球が入った袋がある．この袋から玉を同時に2球取り出し，赤玉は手元に置き，白玉は袋に返すという試行を繰り返す．n 回の試行の後，袋に赤玉が2球残っている確率を p_n，1球残っている確率を q_n とする．

(i)　p_1，q_1 を求めよ．

(ii)　q_2 を求めよ．

(iii)　p_n，q_n を p_{n-1}，q_{n-1} を用いて表せ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

(2)　ある1面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている．平面に接する面（底面）の4辺のうち1辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う．ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする．この操作を n 回（n は自然数）続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく．

(i)　a_2 を求めよ．

(ii)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け．

(iii)　b_n を n の式で表せ．

＜ Note ＞

第18講　確率と数列

18 座標平面上に4点A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1)を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x軸と平行な方向の移動について確率p，y軸と平行な方向の移動について確率$1-p$で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n秒後に頂点Aにいる確率をa_n ($n=0$, 1, 2, …) とする．a_{2n}を求めよ．

【選択肢】

㋐ $a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1-(2p-1)^{2n}\}$　㋑ $a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n}\}$

㋒ $a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n-1}\}$

＜ Note ＞

第 19 講　数学的帰納法

19　次の各問いに答えよ.

(1)　数列 a_1, a_2, ……, a_{n+1} において, $2 \leqq j \leqq n$ を満たすすべての自然数 j に対して

不等式 (A)　$$a_j \geqq \frac{a_{j-1}+a_{j+1}}{2}$$

が成り立つとき, $2 \leqq k \leqq n$ を満たすすべての自然数 k に対して

不等式 (B)　$$a_k \geqq \frac{a_1+(k-1)a_{k+1}}{k}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

(2)　$0<x<y$ のとき, 次の問いに答えよ.

(イ)　$0<\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}<\dfrac{y-x}{2}$ を証明せよ.

(ロ)　$x_1=\sqrt{xy}$, $y_1=\dfrac{x+y}{2}$, $x_2=\sqrt{x_1y_1}$, $y_2=\dfrac{x_1+y_1}{2}$, ……

, $x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$, $y_n=\dfrac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$

と順次定めるとき

$$0<y_n-x_n<\frac{y-x}{2^n}$$

であることを証明せよ.

< Note >

第19講　数学的帰納法

19　n 個の実数 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ について $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqq n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

＜ Note ＞

第20講　ベクトルでの計算

20　次の各問いに答えよ.

(1)　平面上の点Pおよび定点A，Bに対して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

が成り立っているとき，点Pの軌跡を求めよ.

(2)　平面上の三角形ABCに対して点Pが

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\geqq\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$$

を満たしているとき，点Pの描く図形を図示せよ.

(3)　平面上の点Pおよび定点 A_k ($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{P}}|^2$ の最小値を求めよ.

< Note >

第 20 講　ベクトルでの計算

20　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の点 P 及び定点 A，B に対して

$$8\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} \leqq |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 + 4|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$$

が成り立っているとき，点 P の存在領域を求めよ．

(2)　平面上の三角形 ABC に対して点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

を満たしているとき，点 P の軌跡を求めよ．

(3)　n 個の正の実数の列 a_1，a_2，……，a_n と，それをでたらめに並べ替えた実数の列 b_1，b_2，……，b_n を考え，n 個の組 $(a_1,\ b_1)$，$(a_2,\ b_2)$，……，$(a_n,\ b_n)$ をつくる．これらを xy 平面上の点 P_1，P_2，……，P_n の座標とし，それぞれの点から，原点 O を通るある直線 l へ下ろした垂線の足を Q_1，Q_2，……，Q_n とする．このとき

$$D = \sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_k}|^2$$

の最小値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　点 A を中心とする半径 AB の円の周及び内部

　　㋑　点 A を中心とする半径 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$AB の円の周及び内部

　　㋒　点 A を中心とする半径 2AB の円の周及び内部

(2)　㋐　直線 BC に垂直で点 A を通る直線　　㋑　直線 AB に垂直で点 C を通る直線

　　㋒　直線 CA に垂直で点 B を通る直線

(3)　㋐　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2$　　㋑　$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2$　　㋒　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2$

< Note >

第21講　球の取り扱い

21　原点を O(0, 0, 0) とし，空間の3点を A(0, −2, 2)，B(1, 1, 1)，C(0, 0, 1) とする．点Cを中心とする半径1の球を S として，S 上の点をPとする．また xy 平面上の点を Q(X, Y, 0) とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$X=Y=1$ としたとき，直線AQと球面 S との2つの交点を，点Aに近い方から P_1，P_2 とする．このとき，$AP_1:P_1P_2:P_2Q$ を求めよ．

(2)　点Pが3点O，A，Bで定まる平面上を動くとき，点Pの軌跡はある点を中心とする円になる．この円の中心と半径を求めよ．また，点Pの z 座標のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　点Pは $CP\perp AP$ を満たしながら動くとする．点Qが直線AP上にあるとき，点Qの軌跡を求めよ．

＜ Note ＞

第21講　球の取り扱い

21　空間の点 $(10,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径9の球面を S_1 とし，点 $(0,\ 10,\ 0)$ を中心とする半径8の球面を S_2 とする．S_1 と S_2 に接し，原点を通る直線の大きさ1の方向ベクトル $(a,\ b,\ c)$ $(c \geqq 0)$ をすべて求めよ．

【選択肢】

㋐　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \mp\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$ （複号同順）

㋑　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$ （複号同順）

㋒　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$ （複号任意）

< Note >

第22講　三角形の五心とベクトル

22　実数 α, β に対して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．次の各条件を満たす α と β の値を求めよ．ただし，(2)と(5)では $\mathrm{AB}=c$, $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$ を用いよ．

(1)　P は三角形 ABC の重心

(2)　P は三角形 ABC の内心

(3)　P(＝H) は三角形 ABC の垂心

(4)　P は三角形 ABC の外心

(5)　P は直線 AB に関して点 C と反対側にある傍心

< Note >

第 22 講　三角形の五心とベクトル

22　A(3, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 0, 4) とするとき，三角形 ABC の重心，内心，垂心，外心をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

㋐　重心 $\left(1,\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$，内心 $\left(\frac{30\sqrt{2}-24}{17},\ \frac{50-20\sqrt{2}}{17},\ \frac{50-20\sqrt{2}}{17}\right)$，

垂心 $\left(\frac{24}{17},\ \frac{18}{17},\ \frac{18}{17}\right)$，外心 $\left(\frac{27}{34},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{17}\right)$

㋑　重心 $(4,\ 3,\ 4)$，内心 $\left(\frac{24}{17},\ \frac{20\sqrt{2}}{17},\ \frac{20\sqrt{2}}{17}\right)$，垂心 $\left(\frac{18}{17},\ \frac{18}{17},\ \frac{24}{17}\right)$，

外心 $\left(\frac{27}{34},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{34}\right)$

㋒　重心 $\left(\frac{4}{3},\ 1,\ \frac{4}{3}\right)$，内心 $\left(\frac{30\sqrt{2}}{17},\ \frac{50}{17},\ \frac{50}{17}\right)$，垂心 $\left(\frac{18}{17},\ \frac{24}{17},\ \frac{18}{17}\right)$，

外心 $\left(\frac{27}{17},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{17}\right)$

＜ Note ＞

第 23 講　ベクトルの利用法

23　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の２点を A(2, 4)，C(6, 3) とする．点 P が C を中心とする半径 2 の円周上を動くとき，AP の長さを最小にする点 P の座標を求めよ．

(2)　平面上の点を B(−4, 3) とし，$3x+4y-25\geqq 0$ で表される領域を D とする．点 P(x, y) が領域 D 内を動くとき，BP の長さが最小となるような点 P の座標を求めよ．

(3)　原点 O と異なる点 Q(X, Y) に対して，点 P は O を端点とする半直線 OQ 上にあり，$\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ}=r\,(>0)$ を満たしているとする．このとき点 P の座標を求めよ．

(4)　空間の２点を A(5, 3, 7)，C(8, 1, 9) とする．点 P が C を中心とする半径 2 の球面上を動くとき，AP の長さを最小にする点 P の座標を求めよ．

＜ Note ＞

第23講　ベクトルの利用法

23　次の各問いに答えよ．

(1)　xy 平面上で，直線 $l：ax+by+c=0$ として，l 上にない点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とする．P から l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(2)　空間の点 $(10,\ 9,\ 8)$ を中心とする半径 7 の球面を S_1 とし，点 $(6,\ 5,\ 4)$ を中心とする半径 3 の球面を S_2 とする．S_1 上の点を P，S_2 上の点を Q とするとき，線分 PQ の長さが最大になるような点 P と Q の座標を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$\mathrm{H}\left(p+\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ q+\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

　　㋑　$\mathrm{H}\left(p-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ q-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

　　㋒　$\mathrm{H}\left(q-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ p-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

(2)　㋐　$\mathrm{P}\left(6-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 5-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 4-\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(10+\sqrt{3},\ 9+\sqrt{3},\ 8+\sqrt{3})$

　　㋑　$\mathrm{P}\left(10-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 9-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 8-\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(6+\sqrt{3},\ 5+\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3})$

　　㋒　$\mathrm{P}\left(10+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 9+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 8+\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(6-\sqrt{3},\ 5-\sqrt{3},\ 4-\sqrt{3})$

＜ Note ＞

第24講　空間での垂線の足

24　空間内の4点をA(1, 2, 1), B(3, 1, 1), C(1, 3, 2), D(6, 6, −2)とし，3点A, B, Cを通る平面をα，点Dから平面αに下ろした垂線の足をHとする．次の各問いに答えよ．

(1)　四面体DABCの体積を求めよ．

(2)　平面α上にあり，中心がAで半径が1の円周上を点Qが動くものとする．線分DQの長さが最大となるとき，AQ：QHを求めよ．

< Note >

第24講　空間での垂線の足

24 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(-1, $\sqrt{5}$, 1), C(0, 0, $\sqrt{6}$) として，3点O, A, Bを通る平面を α とする．α 上の点Oを中心とし半径2の円周上の点をPとして，点Cから α へ下ろした垂線の足をHとするとき，PHの長さの最小値を求めよ．

【選択肢】

㋐ 1　㋑ 2　㋒ 3

< Note >

テキスト解答

第１講　２次方程式の解の配置

1　次の各問いに答えよ．

(1)　x の 2 次方程式 $x^2-2(a+2)x+a^2=0$ が $1<x<2$ に少なくとも 1 つ実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(2)　x の 2 次方程式 $x^2-2(a+2)x-6a=0$ が $1<x<2$ に少なくとも 1 つ実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

【答】 (1) $-1<a<2-2\sqrt{2}$，$3<a<2+2\sqrt{2}$　(2) $-5+\sqrt{21}\leqq a<-\dfrac{3}{8}$

【解答】

(1)　$f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2$ とおくと，$f(x)=\{x-(a+2)\}^2-4a-4$ であるので，求める条件は

　　　(i)　$a+2\leqq 1$ かつ $f(1)<0$ かつ $f(2)>0$

または　(ii)　$1<a+2<2$ かつ $-4a-4\leqq 0$ かつ「$f(1)>0$ または $f(2)>0$」

または　(iii)　$a+2\geqq 2$ かつ $f(1)>0$ かつ $f(2)<0$

すなわち，

　　　(i)　$a\leqq -1$ かつ $-1<a<3$ かつ「$a<2-2\sqrt{2}$，$a>2+2\sqrt{2}$」

または　(ii)　$-1<a<0$ かつ $a\geqq -1$ かつ

　　　「$a<-1$，$a>3$ または $a<2-2\sqrt{2}$，$a>2+2\sqrt{2}$」

または　(iii)　$a\geqq 0$ かつ「$a<-1$，$a>3$」かつ $2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$

ゆえに　$\boldsymbol{-1<a<2-2\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{3<a<2+2\sqrt{2}}$

(2)　与式を変形して $x^2-4x=2a(x+3)$ より，

$y=x^2-4x$ と $y=2a(x+3)$〔傾き $2a$ で点 $(-3,\ 0)$ を通る直線〕で考える．

　この 2 つのグラフが接するとき，$x^2-2(a+2)x-6a=0$ が重解をもつので，判別式より

$$(a+2)^2-(-6a)=0$$

$$a^2+10a+4=0$$

$$\therefore\quad a=-5\pm\sqrt{21}$$

となる．このときの重解は $x=a+2$ より，$1<x<2$ に含まれるのは

$$a=-5+\sqrt{21}$$

のときの重解で $x=-3+\sqrt{21}$ である．

　また，直線 $y=2a(x+3)$ が点 $(1,\ -3)$ を通るとき $a=\dfrac{y}{2(x+3)}=-\dfrac{3}{8}$ となり，

直線 $y=2a(x+3)$ が点 $(2,\ -4)$ を通るとき $a=\dfrac{y}{2(x+3)}=-\dfrac{2}{5}$ となる．

$-5+\sqrt{21}<-\dfrac{2}{5}<-\dfrac{3}{8}$ より，求める a の値の範囲は $\boldsymbol{-5+\sqrt{21}\leqq a<-\dfrac{3}{8}}$

第２講　絶対値付き２次方程式の解の個数

2　a と b は実数の定数として，次の各問いに答えよ．

(1)　x の方程式 $x^2-4|x-1|+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(2)　x の方程式 $|x^2-4|-ax-3a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(3)　x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど２個だけもつような a と b の条件を求め，それを ab 平面に図示せよ．

【答】

(1) $\begin{cases} 0 & (a>8 \text{ のとき}) \\ 1 & (a=8 \text{ のとき}) \\ 2 & (a<-1,\ 0<a<8 \text{ のとき}) \\ 3 & (a=-1,\ 0 \text{ のとき}) \\ 4 & (-1<a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0 & (-6-2\sqrt{5}<a<0 \text{ のとき}) \\ 1 & (a=-6-2\sqrt{5} \text{ のとき}) \\ 2 & (a<-6-2\sqrt{5},\ a=0,\ a>6-2\sqrt{5} \text{ のとき}) \\ 3 & (a=6-2\sqrt{5} \text{ のとき}) \\ 4 & (0<a<6-2\sqrt{5} \text{ のとき}) \end{cases}$

(3)　$b<-1\ (a\geqq 2)$ または $b<\dfrac{a^2}{4}-a\ (-2\leqq a<2)$

または $\dfrac{a^2}{4}+a<b<\dfrac{a^2}{4}-a\ (a<-2)$ または $b<-1\ (a<-2)$

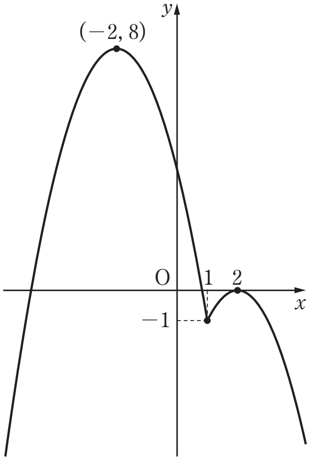
【解答】

(1)　$x^2-4|x-1|+a=0$ より

$$a=-x^2+4|x-1|$$
$$=\begin{cases} -x^2+4(x-1) & (x\geqq 1) \\ -x^2+4(-x+1) & (x<1) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -(x-2)^2 & (x\geqq 1) \\ -(x+2)^2+8 & (x<1) \end{cases}$$

であるので，

$y=-x^2+4|x-1|$ のグラフ



と直線 $y=a$ との共有点の個数を考えて，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} \mathbf{0} & (a>8\text{ のとき}) \\ \mathbf{1} & (a=8\text{ のとき}) \\ \mathbf{2} & (a<-1,\ 0<a<8\text{ のとき}) \\ \mathbf{3} & (a=-1,\ 0\text{ のとき}) \\ \mathbf{4} & (-1<a<0\text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)　$|x^2-4|-ax-3a=0$ より $|x^2-4|=a(x+3)$ となるので，$y=|x^2-4|$ と $y=a(x+3)$ について考える.

曲線 $y=x^2-4\,(x\leqq-2,\ x\geqq2)$ と直線 $y=a(x+3)$ が接するとき

$$x^2-4=a(x+3)$$
$$x^2-ax-3a-4=0$$

が重解をもつので $(-a)^2-4(-3a-4)=0$ すなわち $a^2+12a+16=0$

よって $a=-6\pm2\sqrt{5}$　グラフを考えて $a=-6-2\sqrt{5}$

曲線 $y=-x^2+4\,(-2<x<2)$ と直線 $y=a(x+3)$ が接するとき

$$-x^2+4=a(x+3)$$
$$x^2+ax+3a-4=0$$

が重解をもつので $a^2-4(3a-4)=0$ すなわち $a^2-12a+16=0$

よって $a=6\pm2\sqrt{5}$　グラフを考えて $a=6-2\sqrt{5}$

よって求める個数は

$$\begin{cases} \mathbf{0} & (-6-2\sqrt{5}<a<0\text{ のとき}) \\ \mathbf{1} & (a=-6-2\sqrt{5}\text{ のとき}) \\ \mathbf{2} & (a<-6-2\sqrt{5},\ a=0,\ a>6-2\sqrt{5}\text{ のとき}) \\ \mathbf{3} & (a=6-2\sqrt{5}\text{ のとき}) \\ \mathbf{4} & (0<a<6-2\sqrt{5}\text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)　$f(x)=x^2+a|x-1|+b$ とおくと

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a(x-1)+b & (x\geqq1) \\ x^2+a(-x+1)+b & (x<1) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} \left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-a+b & (x\geqq1) \quad \cdots\cdots① \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a+b & (x<1) \quad \cdots\cdots② \end{cases}$$

であるので，

(Ⅰ)　$a\geqq2$ のとき，$f(x)$ は $x=1$ だけで極値 $f(1)=1+b$ をとり，これは最小値でもある.

(Ⅱ)　$-2\leqq a<2$ のとき，$f(x)$ は $x=\dfrac{a}{2}$ だけで極値 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+a+b$ をとり，これは最小値でもある.

(Ⅲ)　$a<-2$ のとき，$f(x)$ の増減は

a	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	╳	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗	$1+b$	↘		↗

となり

$$f\left(-\frac{a}{2}\right)-f\left(\frac{a}{2}\right)$$
$$=\left(-\frac{a^2}{4}-a+b\right)-\left(-\frac{a^2}{4}+a+b\right)$$
$$=-2a>0$$

となるので，$f\left(-\frac{a}{2}\right)>f\left(\frac{a}{2}\right)$ である．

以上より，$f(x)=0$ が異なる実数解をちょうど2個だけもつ条件は

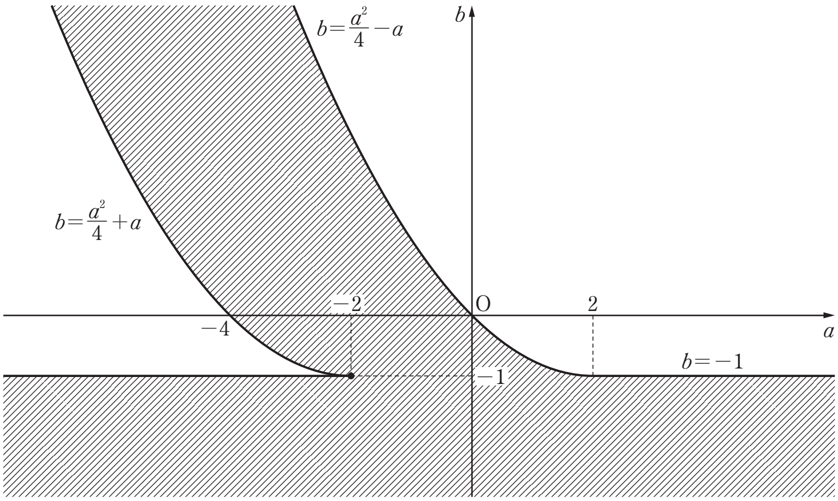
「$a\geqq 2$ かつ $1+b<0$」または「$-2\leqq a<2$ かつ $-\frac{a^2}{4}+a+b<0$」

または「$a<-2$ かつ $\left(-\frac{a^2}{4}+a+b<0<-\frac{a^2}{4}-a+b\right.$ または $\left.0>1+b\right)$」

$\therefore$　**$b<-1$ $(a\geqq 2)$ または $b<\frac{a^2}{4}-a$ $(-2\leqq a<2)$**

または $\frac{a^2}{4}+a<b<\frac{a^2}{4}-a$ $(a<-2)$ または $b<-1$ $(a<-2)$

ゆえに，求める領域は下図の点 $(-2,\ -1)$ は含み，それ以外の境界は含まない斜線部分．



第3講　加法定理について…

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\cos\dfrac{2}{7}\pi$ の小数第1位の数が6であることを示せ．

(2)　n を自然数とするとき

$$1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

であることを示せ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

【答】　略

【解答】

(1)　$\theta=\dfrac{2}{7}\pi$ とすると $7\theta=2\pi$　よって $\cos3\theta=\cos(2\pi-4\theta)=\cos4\theta$　これより

$$\cos3\theta=\cos4\theta$$
$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$$
$$8\cos^4\theta-4\cos^3\theta-8\cos^2\theta+3\cos\theta+1=0$$
$$(\cos\theta-1)(8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos\theta-1)=0$$

ここで $0<\cos\theta=\cos\dfrac{2}{7}\pi<1$ より，$x=\cos\dfrac{2}{7}\pi$ は $8x^3+4x^2-4x-1=0$ の正の解であることがわかる．また

$$g(x)=8x^3+4x^2-4x-1$$

とおくと，$g(-1)=g(0)=-1<0$，$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1>0$ 及び $g(x)=4x(2x^2+x-1)-1$ より

$$g(0.6)=2.4(0.72+0.6-1)-1=-0.232<0$$
$$g(0.7)=2.8(0.98+0.7-1)-1=0.904>0$$

であるから，$g(x)=0$ は $-1<x<-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}<x<0$，$0.6<x<0.7$ の範囲にそれぞれ1つずつ実数解をもつ．

よって

$$0.6<\cos\frac{2}{7}\pi<0.7$$

となるので，$\cos\dfrac{2}{7}\pi$ の小数第1位の数は6である．

(2)　$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1+\cos\theta,\ (\text{右辺})=\frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$$

より与式は成り立つ．

　$n=k(\geqq 1)$ のとき

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos k\theta=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

を仮定すると

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos k\theta+\cos(k+1)\theta-\frac{\sin\frac{(k+1)+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\cos(k+1)\theta-\frac{\sin\frac{(k+1)+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\cos(k+1)\theta-\frac{\left(\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{k+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\left(\cos\frac{k}{2}\theta-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{k+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}+\cos(k+1)\theta-\cos^2\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=\sin\frac{k+1}{2}\theta\left(\cos\frac{k}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{k}{2}\theta\right)+\cos(k+1)\theta-\cos^2\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=\sin^2\frac{k+1}{2}\theta+\cos(k+1)\theta-\cos^2\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=0$$

となり，$n=k+1$ のときにも与式は成り立つ．

　よって数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して与式は示された．

第４講　三角関数の合成（応用編）

4　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(\theta)=\sin\theta+a\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．ただし，a は実数の定数とする．

(2)　関数 $f(\theta)=(\sqrt{3}-1)\sin\theta+(\sqrt{3}+1)\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(3)　関数 $f(\theta)=8\cos^3\theta+4\sin^3\theta-6\cos\theta-3\sin\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【答】 (1) 最大値 $\begin{cases}\sqrt{1+a^2} & (a \geqq 0)\\ 1 & (a<0)\end{cases}$，最小値 $\begin{cases} a & (a \leqq 1)\\ 1 & (a>1)\end{cases}$

(2) 最大値 $2\sqrt{2}$，最小値 $\sqrt{3}-1$　　(3) 最大値 2，最小値 $-\sqrt{5}$

【解答】

(1)　$f(\theta)=\sqrt{1+a^2}\sin(\theta+\beta)$　（ただし，β は $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\beta=a$ を満たす実数）

ここで $\beta \leqq \theta+\beta \leqq \dfrac{\pi}{2}+\beta$ であるから，

$a \geqq 0$ のとき，$\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ において**最大値 $\sqrt{1+a^2}$** をとり，

$a<0$ のとき，$\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}+\beta$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ において**最大値 1** をとる．

また，**$a \leqq 1$ のとき**，$\theta+\beta=\beta$ すなわち $\theta=0$ において**最小値 a** をとり，

$a>1$ のとき，$\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}+\beta$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ において**最小値 1** をとる．

(2)　$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{5}{12}\pi\right)$ であり $\dfrac{5}{12}\pi \leqq \theta+\dfrac{5}{12}\pi \leqq \dfrac{11}{12}\pi$ であるので，

$\theta+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ において**最大値 $2\sqrt{2}$** をとり，

$\theta+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{11}{12}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ において**最小値 $\sqrt{3}-1$** をとる．

(3)　$f(\theta)=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)=-\sin3\theta+2\cos3\theta$ より

$f(\theta)=\sqrt{5}\sin(3\theta+\alpha)$　（ただし，α は $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ かつ $\tan\alpha=-2$ を満たす実数）と表せるので，

$3\theta+\alpha=\alpha$ すなわち $\theta=0$ において**最大値 2** をとり，

$3\theta+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{3}$ において**最小値 $-\sqrt{5}$** をとる．

第５講　$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ の求め方

5　$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$\cos 3\theta=\cos 2\theta$ であることを示し，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{C}=\theta$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$ を満たす三角形 ABC において，$\angle \mathrm{B}$ の二等分線と辺 AC の交点を D とする．CD の長さを利用して $\cos\theta$ の値を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{x_j}=(\cos j\theta,\ \sin j\theta)$ $(j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ を考えることにより，$\cos\theta$ の値を求めよ．

【答】 (1)，(2)，(3)ともに $\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【解答】

(1)　$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ より $5\theta=2\pi$ であるので $3\theta=2\pi-2\theta$　このとき

$$\cos 3\theta=\cos(2\pi-2\theta)=\cos 2\theta$$

となる．ここで $\cos\theta=t$ とおくと，$\cos 3\theta=4t^3-3t$，$\cos 2\theta=2t^2-1$ より $\cos 3\theta=\cos 2\theta$ は $4t^3-3t=2t^2-1$ となる．これを整理すると

$$(t-1)(4t^2+2t-1)=0$$

ここで $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<t=\cos\theta<1$ であるので，$t=\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

(2)　BD は $\angle \mathrm{B}$ の二等分線より $\angle \mathrm{DBC}=\dfrac{\theta}{2}$

また，$\angle \mathrm{DBA}=\dfrac{\theta}{2}$ と $\angle \mathrm{A}=\dfrac{\theta}{2}$ より三角形 DAB は $\mathrm{AD}=\mathrm{BD}$ の二等辺三角形となり，

$\angle \mathrm{BDC}=\theta$ より三角形 BCD は $\mathrm{BD}=\mathrm{BC}$ の二等辺三角形となる．

よって，$\mathrm{CD}=x$ とおくと，$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=\mathrm{BC}=1-x$ となり，三角形 BCD と三角形 ABC が相似であるので，$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{BC}:\mathrm{CD}$ より $1:(1-x)=(1-x):x$ すなわち $(1-x)^2=x$

これと $0<x<1$ より　$x^2-3x+1=0$　ゆえに　$x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}(1-x)=\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

(3)　$\overrightarrow{x_1}$ と $\overrightarrow{x_0}$ のなす角と $\overrightarrow{x_4}$ と $\overrightarrow{x_0}$ のなす角はともに θ であるから，$\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_4}=(2\cos\theta)\overrightarrow{x_0}$ と表せ，$\overrightarrow{x_2}$ と $\overrightarrow{x_0}$ のなす角と $\overrightarrow{x_3}$ と $\overrightarrow{x_0}$ のなす角はともに 2θ であるから，$\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}=(2\cos 2\theta)\overrightarrow{x_0}$ と表せるので，$\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}+\overrightarrow{x_4}=(2\cos 2\theta+2\cos\theta+1)\overrightarrow{x_0}$　……①

またて $\overrightarrow{x_2}$ と $\overrightarrow{x_1}$ のなす角と $\overrightarrow{x_0}$ と $\overrightarrow{x_1}$ のなす角はともに θ であるから，$\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_0}=(2\cos\theta)\overrightarrow{x_1}$ と表せ，$\overrightarrow{x_3}$ と $\overrightarrow{x_1}$ のなす角と $\overrightarrow{x_4}$ と $\overrightarrow{x_1}$ のなす角はともに 2θ であるから，$\overrightarrow{x_3}+\overrightarrow{x_4}=(2\cos 2\theta)\overrightarrow{x_1}$ と表せるので，$\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}+\overrightarrow{x_4}=(2\cos 2\theta+2\cos\theta+1)\overrightarrow{x_1}$　……②

①と②より $2\cos 2\theta+2\cos\theta+1=0$ すなわち $4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0$

ゆえに，$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$ を得る．

第6講　桁数などの計算

6 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，次の各問いに答えよ．

(1) 2^{100} の桁数，最高位の数，一の位の数をそれぞれ求めよ．また最高位から2番目の位の数は何かを答えよ．

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$ は小数第何位にはじめて0でない数が現れるかを求めよ．またその数は何かを答えよ．

(3) $2^{130}+3^{82}$ の桁数，最高位の数をそれぞれ求めよ．

(4) 7^{62} の桁数，最高位の数をそれぞれ求めよ．ただし，必要ならば $7^4=2401$，$3^5=243$ であることを用いよ．

【答】 (1) 31桁，最高位の数は1，一の位の数は6，最高位から2番目の位の数は2
(2) 小数第48位でその数は1　(3) 40桁，最高位の数は2　(4) 53桁，最高位の数は2

【解答】

(1) $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ より $10^{0.3010}=2$，$10^{0.4771}=3$ である．

$2^{100}=(10^{0.3010})^{100}=10^{30.10}=10^{0.10}\times10^{30}$ であり $1=10^0<10^{0.10}<10^{0.3010}=2$ より

$$1\times10^{30}<2^{100}<2\times10^{30}$$

となるので，最高位の数が**1**の**31桁**の数である．

また，$2^{n+4}-2^n=10\times3\times2^{n-1}$ より，$n\geqq1$ のとき 2^{n+4} と 2^n を10で割った余りは等しい．これより 2^{100} と $2^4=16$ を10で割った余り，つまり一の位は一致して**6**である．

次に，$2^{100}=10^{1.10}\times10^{29}$ であり，$12=3\times2^2=10^{0.4771}\times10^{0.3010\times2}=10^{1.0791}$，
$12.8=2^7\times10^{-1}=10^{0.3010\times7}\times10^{-1}=10^{1.1070}$ より

$$12<10^{1.10}<12.8$$

ゆえに

$$12\times10^{29}<2^{100}<12.8\times10^{29}$$

よって最高位から2番目の位の数は**2**である．

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}=\left(\dfrac{1}{10^{0.4771}}\right)^{100}=10^{0.29}\times10^{-48}$ で，$1=10^0<10^{0.29}<10^{0.3010}=2$ より

$$1\times10^{-48}<\left(\frac{1}{3}\right)^{100}<2\times10^{-48}$$

よって $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$ は**小数第48位**にはじめて0でない数が現れ，その数は**1**である．

(3) $2^{130}=(10^{0.3010})^{130}=10^{39.1300}=10^{0.1300}\times10^{39}$，$3^{82}=(10^{0.4771})^{82}=10^{39.1222}=10^{0.1222}\times10^{39}$ である．ここで，$1.5=\dfrac{3}{2}=\dfrac{10^{0.4771}}{10^{0.3010}}=10^{0.1761}$ より

$$1\times10^{39}<2^{130}<1.5\times10^{39},\quad 1\times10^{39}<3^{82}<1.5\times10^{39}$$

となるので

$$2\times10^{39}<2^{130}+3^{82}<3\times10^{39}$$

よって $2^{130}+3^{82}$ は最高位の数が**2**の**40桁**の数である．

(4)　$2400=2^3\times3\times10^2=10^{0.3010\times3+0.4771+2}=10^{3.3801}$，$2430=3^5\times10^1=10^{0.4771\times5+1}=10^{3.3855}$
より

$$10^{3.3801}<7^4<10^{3.3855}$$

となるので $10^{0.845025}<7<10^{0.846375}$　よって

$$10^{52.39155}<7^{62}<10^{52.47525}$$

ここで $2\times10^{52}=10^{0.3010}\times10^{52}=10^{52.3010}$，$3\times10^{52}=10^{0.4771}\times10^{52}=10^{52.4771}$ より

$$2\times10^{52}<7^{62}<3\times10^{52}$$

よって 7^{62} は最高位の数が **2** の **53 桁**の数である.

第７講　３次の極値などについて

7　２つの関数を $f(x)=x^3+3x^2-3x-4$ と $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とし，$g(x)$ は $x=\alpha$ で極大値 M，$x=\beta$ で極小値 m をとるとする．次の各問いに答えよ．

(1)　$M+m=2g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ であることを示せ．

(2)　$M-m=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ．

(3)　$f(x)$ の極大値と極小値，それらの和，差をそれぞれ求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 略　(3) 極大値，極小値，和，差は順に $1+4\sqrt{2}$，$1-4\sqrt{2}$，2，$8\sqrt{2}$

【解答】

(1)　$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より $g'(x)=3x^2+2ax+b$ であるので，$g(x)$ が極値をもつ条件は $a^2-3b>0$ であり，$g'(x)=0$ の異なる２解が α と β であるから解と係数の関係より $\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{3}b$ である．

このとき $g(x)$ の増減は

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗		↘		↗

となるので $x_1=\alpha$，$x_2=\beta$ である．

ここで，$g(x)=g'(x)\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\dfrac{2}{9}(3b-a^2)x+\left(c-\dfrac{1}{9}ab\right)$ であるので

$$\begin{aligned}M+m&=g(\alpha)+g(\beta)\\&=\frac{2}{9}(3b-a^2)(\alpha+\beta)+2\left(c-\frac{1}{9}ab\right)\\&=\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab+2c\end{aligned}$$

となる．一方，$2g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=2g\left(-\dfrac{1}{3}a\right)=\dfrac{4}{27}a^3-\dfrac{2}{3}ab+2c$ であるから，

$M+m=2g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ は示された．

(2)　$M-m=\Big[g(x)\Big]_\beta^\alpha=\displaystyle\int_\beta^\alpha g'(x)dx=\int_\beta^\alpha 3(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$

(3)　$f(x)=x^3+3x^2-3x-4$ より $f'(x)=3x^2+6x-3$ であるので，$f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

となる．また，$f(x)=f'(x)\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}\right)-4x-3$ より

極大値　$f(-1-\sqrt{2})=\mathbf{1+4\sqrt{2}}$，極小値　$f(-1+\sqrt{2})=\mathbf{1-4\sqrt{2}}$

極大値と極小値の和は　$(1+4\sqrt{2})+(1-4\sqrt{2})=\mathbf{2}$

極大値と極小値の差は　$(1+4\sqrt{2})-(1-4\sqrt{2})=\mathbf{8\sqrt{2}}$

≪別解≫

$f'(x)=3x^2+6x-3$ について，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=3^2-3\times(-3)>0$ より $f'(x)=0$ は異なる2つの実数解 p，$q\,(p<q)$ をもつので，$f(x)$ の極大値を $N=f(p)$，極小値を $n=f(q)$ とおくと，解と係数の関係より

$$p+q=-2,\quad pq=-1$$

よって

$$(q-p)^2=(p+q)^2-4pq=8$$

$$\therefore\quad q-p=2\sqrt{2}$$

であるから，(1)，(2)により $f(x)$ の極大値と極小値の和，差は

$$和\quad N+n=2f\left(\frac{p+q}{2}\right)=2f(-1)=\mathbf{2}$$

$$差\quad N-n=\frac{1}{2}(q-p)^3=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^3=\mathbf{8\sqrt{2}}$$

また，これより

$$2N=(N+n)+(N-n)=2+8\sqrt{2}\qquad\therefore\quad 極大値\quad N=\mathbf{1+4\sqrt{2}}$$

$$2n=(N+n)-(N-n)=2-8\sqrt{2}\qquad\therefore\quad 極小値\quad n=\mathbf{1-4\sqrt{2}}$$

第８講　接線の本数と実数解の個数

> **8**　次の各問いに答えよ．
> (1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ とする．曲線 C_1：$y=f(x)$ について，点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を l_p，点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線を l_q とする．$p\neq q$ のとき，l_p と l_q が一致することはないことを示せ．
> (2)　曲線 C_2：$y=x^4-2x^3-3x^2+3x+5$ に対し，曲線上の異なる２点における接線が一致しているという．この２点の x 座標を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) $x=-1,\ 2$

【解答】

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ となるので，点Ｐにおける接線は

$$y=(3ap^2+2bp+c)(x-p)+ap^3+bp^2+cp+d$$

ゆえに　$y=(3ap^2+2bp+c)x-2ap^3-bp^2+d$

点Ｑにおける接線も同様に，$y=(3aq^2+2bq+c)x-2aq^3-bq^2+d$ となる．

これら２つの接線が一致する，つまり

$$\begin{cases} 3ap^2+2bp+c=3aq^2+2bq+c & \cdots\cdots① \\ -2ap^3-bp^2+d=-2aq^3-bq^2+d & \cdots\cdots② \end{cases}$$

が成り立つとすると，①より $(p-q)\{3a(p+q)+2b\}=0$ となるが，

$p\neq q$ より $3a(p+q)+2b=0$，ゆえに　$p+q=-\dfrac{2b}{3a}$　……③　を得る．

また $p\neq q$ と②より $(p-q)\{-2a(p^2+pq+q^2)-b(p+q)\}=0$，ゆえに

$-2a(p^2+pq+q^2)-b(p+q)=0$ となるが，この式は $-2a\{(p+q)^2-pq\}-b(p+q)=0$ と変形できるため，この式に③を代入すると

$$-2a\left\{\left(-\frac{2b}{3a}\right)^2-pq\right\}-b\left(-\frac{2b}{3a}\right)=0$$

よって　$pq=\dfrac{b^2}{9a^2}$　……④　を得る．

③と④より，p と q は $x^2+\dfrac{2b}{3a}x+\dfrac{b^2}{9a^2}=0$ すなわち $\left(x+\dfrac{b}{3a}\right)^2=0$ の２解となるが，

$p=q=-\dfrac{b}{3a}$ (重解) となり，これは $p\neq q$ に矛盾．

よって l_p と l_q が一致することはない．

(2)　実数 p，q を $p<q$ であるとする．$y=x^4-2x^3-3x^2+3x+5$ より

$y'=4x^3-6x^2-6x+3$ となるので，$x=p$ における接線は

$$y=(4p^3-6p^2-6p+3)(x-p)+p^4-2p^3-3p^2+3p+5$$

すなわち $y=(4p^3-6p^2-6p+3)x-3p^4+4p^3+3p^2+5$ となる．

同様に $x=q$ における接線は，$y=(4q^3-6q^2-6q+3)x-3q^4+4q^3+3q^2+5$

この２つの接線が一致するとき

$$\begin{cases} 4p^3-6p^2-6p+3=4q^3-6q^2-6q+3 & \cdots\cdots① \\ -3p^4+4p^3+3p^2+5=-3q^4+4q^3+3q^2+5 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

が成り立つ．

ここで $p \neq q$ より，①は $4\{(p+q)^2-pq\}-6(p+q)-6=0$

②は $-3(p+q)\{(p+q)^2-2pq\}+4\{(p+q)^2-pq\}+3(p+q)=0$ となるので，

$p+q=s$，$pq=t$ とおくと，これら2式はそれぞれ

$$4(s^2-t)-6s-6=0 \quad \cdots\cdots③ \qquad -3s(s^2-2t)+4(s^2-t)+3s=0 \quad \cdots\cdots④$$

となる．

③より $t=s^2-\dfrac{3}{2}s-\dfrac{3}{2}$ となるが，これを④に代入して整理すると

$(s-1)(s^2-2s-2)=0$　したがって $s=1,\ 1\pm\sqrt{3}$ を得る．

$s=1$ のとき $t=-2$　これらより $p=-1$，$q=2$

$s=1-\sqrt{3}$ のとき $t=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$　これらより $p=q=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ となり不適．

$s=1+\sqrt{3}$ のとき $t=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$　これらより $p=q=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ となり不適．

以上より求める x 座標は　$\boldsymbol{x=-1,\ 2}$

第９講　置き換えて３次，解の個数など

9　次の各問いに答えよ．

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とするとき，$f(\theta)=4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．また，方程式 $f(\theta)=k$ が異なる４個の実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．さらに，その k の最小値を k_1 とするとき，$f(\theta)=k_1$ $(0 \leqq \theta \leqq \alpha < 2\pi)$ の異なる実数解の個数が３となるような α の値の範囲を求めよ．

(2)　k を実数の定数とするとき，方程式 $x^6-6x^5+12x^4-(k+12)x^3+12x^2-6x+1=0$ の異なる実数解の個数の最大値を求めよ．

【答】　(1) 最大値 $3\sqrt{2}$，最小値 $-8-3\sqrt{2}$，k の値の範囲は $k=2\sqrt{2}$，$8-3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$，α の値の範囲は $\frac{5}{4}\pi \leqq \alpha < \frac{7}{4}\pi$　(2) 4

【解答】

(1)　$\sin\theta = t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ であり

$$f(\theta)=4(1-2t^2)t+3\sqrt{2}(1-2t^2)-4t$$
$$=-8t^3-6\sqrt{2}t^2+3\sqrt{2}$$

となる．この式を $g(t)$ とおくと，$g'(t)=-12\sqrt{2}t(\sqrt{2}t+1)$ より $g(t)$ の増減は

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$8-3\sqrt{2}$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$3\sqrt{2}$	↘	$-8-3\sqrt{2}$

となる．ここで

$$3\sqrt{2}-(8-3\sqrt{2})=6\sqrt{2}-8=\sqrt{72}-\sqrt{64}>0 \quad \text{および} \quad 2\sqrt{2}>0>-8-3\sqrt{2}$$

より

最大値は $3\sqrt{2}$，　最小値は $-8-3\sqrt{2}$

また，方程式 $t=\sin\theta$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & (t<-1,\ t>1 \text{ のとき}) \\ 1 & (t=\pm 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (-1<t<1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となっているので，上記の増減を考えあわせると，$f(\theta)=k$ の異なる実数解の個数が４となるのは

$$\boldsymbol{k=2\sqrt{2},\ 8-3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}}$$

よって $k_1=2\sqrt{2}$ となるので，$f(\theta)=k_1$ となる $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲での実数解は小さいほうから順に θ_1，θ_2，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$ と表せる．$0 \leqq \theta \leqq \alpha$ の範囲に上記の４つの解のうち３個だけが含まれるような α を考えると，求める α の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{5}{4}\pi \leqq \alpha < \frac{7}{4}\pi}$$

(2)　$x=0$ は明らかに解ではないので，与式の両辺を x^3 で割り整理すると

$$x^3-6x^2+12x-(k+12)+\frac{12}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$$

となる．ここで $x+\frac{1}{x}=t$ とおき，整理すると

$$t^3-6t^2+9t=k$$

となる．この式の左辺を $h(t)$ とおくと，$h'(t)=3(t-1)(t-3)$

より $h(t)$ の増減は

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	↗	4	↘	0	↗

となる．また x の方程式 $t=x+\frac{1}{x}$ の異なる実数解 x の個数は，$x^2-tx+1=0$ の判別式を考えることで

$$\begin{cases} 2 & (t<-2,\ t>2 \text{ のとき}) \\ 1 & (t=\pm 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (-2<t<2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となり，異なる実数 t_1，t_2 に対して $x^2-t_1x+1=0$ と $x^2-t_2x+1=0$ は共通な解をもたないこと，及び $h(-2)=-50$，$h(0)=0$，$h(2)=2$，$h(4)=4$ により，与式の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & (-50<k<0 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=-50 \text{ のとき}) \\ 2 & (k<-50,\ k=0,\ k>2 \text{ のとき}) \\ 3 & (k=2 \text{ のとき}) \\ 4 & (0<k<2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

よって，求める実数解の個数の最大値は **4**

第 10 講　面積の公式

10　次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 C：$y=|x(x-1)|$ と直線 l：$y=kx$（k は定数）に関して，C と l が $x>0$ の範囲で異なる 2 つの交点をもつとする．このとき，C と l によって囲まれる図形全体の面積を最小にする k の値とその面積の最小値を求めよ．

(2)　曲線 C：$y=x^4+px^2+qx+r$ と直線 l：$y=ax+b$ が異なる 2 点で接する条件を求めよ．また，このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を p で表せ．ただし，p，q，r，a，b は実数の定数とする．

【答】 (1) $k=3-2\sqrt{2}$，最小値 $\dfrac{23-16\sqrt{2}}{3}$

(2) 条件：$p<0$，$q=a$，$p^2=4(r-b)$，面積：$S=\dfrac{(-2p)^{\frac{5}{2}}}{30}$

【解答】

(1)　与式より

$$y=x|x-1|=\begin{cases} x(x-1) & (x\leqq 0,\ 1\leqq x) \\ -x(x-1) & (0<x<1) \end{cases}$$

である．これと $y=kx$ を連立して

$$x(x-1)=kx \text{ より}\quad x(x-1-k)=0 \qquad \therefore\quad x=0,\ 1+k$$

$$-x(x-1)=kx \text{ より}\quad x(-x+1-k)=0 \qquad \therefore\quad x=0,\ 1-k$$

よって C と l が $x>0$ で 2 つの交点をもつ条件は

$$0<1-k\leqq 1 \text{ かつ } 1+k\geqq 1 \text{ かつ } 1-k\neq 1+k$$

$$\therefore\quad 0<k<1$$

C と l により囲まれる図形全体の面積を S とし，$1-k=\alpha$，$1+k=\beta$ とおくと

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^{\alpha}\{-x(x-1)-kx\}dx+\int_{\alpha}^{1}\{kx+x(x-1)\}dx+\int_1^{\beta}\{kx-x(x-1)\}dx \\
&=\int_0^{\alpha}\{-x^2+(1-k)x\}dx+\int_{\alpha}^{1}\{x^2-(1-k)x\}dx+\int_1^{\beta}\{-x^2+(1+k)x\}dx \\
&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{\alpha}{2}x^2\right]_0^{\alpha}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha}{2}x^2\right]_{\alpha}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{\beta}{2}x^2\right]_1^{\beta} \\
&=\frac{1}{6}\alpha^3+\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\alpha\right)+\frac{1}{6}\alpha^3\right\}+\left\{\frac{1}{6}\beta^3-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\beta\right)\right\} \\
&=\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{6}\beta^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{2}{3} \\
&=\frac{1}{6}(-k^3+9k^2-3k+1)
\end{aligned}$$

これを $f(k)$ とおくと，$f'(k)=-\dfrac{1}{2}(k^2-6k+1)$ より $f(k)$ の増減は

k	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$f'(k)$		$-$	0	$+$	
$f'(k)$		↘		↗	

となるので，求める k の値は　$\mathbf{3-2\sqrt{2}}$

　また，$f(k)=f'(k)\left(\dfrac{1}{3}k-1\right)+\dfrac{8}{3}k-\dfrac{1}{3}$ より

面積の最小値は　$f(3-2\sqrt{2})=\dfrac{8}{3}(3-2\sqrt{2})-\dfrac{1}{3}=\mathbf{\dfrac{23-16\sqrt{2}}{3}}$

(2)　α，β を $\alpha<\beta$ を満たす実数とする．

　$x^4+px^2+qx+r=ax+b$　すなわち $x^4+px^2+(q-a)x+(r-b)=0$ が α，β をそれぞれ重解にもつとすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases} 2(\alpha+\beta)=0 & \cdots\cdots① \\ \alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta=p & \cdots\cdots② \\ 2\alpha\beta(\alpha+\beta)=-(q-a) & \cdots\cdots③ \\ (\alpha\beta)^2=r-b & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

が成り立つ．①より $\alpha+\beta=0$　これと②より得られる $(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=p$ より $\alpha\beta=\dfrac{p}{2}$

このとき α と β は $X^2+\dfrac{p}{2}=0$ の異なる2つの実数解となるので，$\dfrac{p}{2}<0$　すなわち

$\boldsymbol{p<0}$ を得る．また③，④より $\boldsymbol{q=a}$，$\boldsymbol{p^2=4(r-b)}$ となる．この条件のもとで

$$\begin{aligned} S&=\int_\alpha^\beta\{(x^4+px^2+qx+r)-(ax+b)\}dx \\ &=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx \\ &=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}dx \\ &=\left[\frac{1}{5}(x-\alpha)^5-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^4+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta \\ &=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5 \\ &=\frac{1}{30}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{5}{2}} \\ &=\mathbf{\frac{(-2p)^{\frac{5}{2}}}{30}} \end{aligned}$$

第 11 講　絶対値付き積分

11　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=\int_0^x |t(t-x^2)|dt$ とする．$f(x)$ を求めよ．

(2)　$g(x)=\int_0^1 |xt-1|dt$ とする．$g(x)$ を求めよ．

(3)　$h(x)=\left|x^2-\int_0^1 h(t)dt\right|$ を満たす関数 $h(x)$ を求めよ．

【答】 (1) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{3}x^3 & (x\leqq 0) \\ \dfrac{1}{3}x^6-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{3}x^3 & (0<x<1) \\ \dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{3}x^3 & (x\geqq 1) \end{cases}$　(2) $g(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+1 & (x\leqq 1) \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}-1 & (x>1) \end{cases}$

(3) $h(x)=\left|x^2-\dfrac{1}{4}\right|$

【解答】

(1)　(Ⅰ)　$x\leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^x (t^2-x^2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{x^2}{2}t^2\right]_0^x=-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3$$

(Ⅱ)　$0<x<1$ のとき

$$f(x)=\int_0^{x^2}(-t^2+x^2t)dt+\int_{x^2}^x (t^2-x^2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{x^2}{2}t^2\right]_0^{x^2}+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{x^2}{2}t^2\right]_{x^2}^x=\frac{1}{3}x^6-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3$$

(Ⅲ)　$x\geqq 1$ のとき

$$f(x)=\int_0^x (-t^2+x^2t)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{x^2}{2}t^2\right]_0^x=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3$$

以上より，$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{3}x^3 & (x\leqq 0) \\ \dfrac{1}{3}x^6-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{3}x^3 & (0<x<1) \\ \dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{3}x^3 & (x\geqq 1) \end{cases}}$

(2)　(Ⅰ)　$x\leqq 1$ のとき

$$g(x)=\int_0^1 (-xt+1)dt=\left[-\frac{x}{2}t^2+t\right]_0^1=-\frac{1}{2}x+1$$

(Ⅱ)　$x>1$ のとき

$$g(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}(-xt+1)dt+\int_{\frac{1}{x}}^1 (xt-1)dt$$

$$=\left[-\frac{x}{2}t^2+t\right]_0^{\frac{1}{x}}+\left[\frac{x}{2}t^2-t\right]_{\frac{1}{x}}^1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}-1$$

以上より，$\boldsymbol{g(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+1 & (x\leqq 1) \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}-1 & (x>1) \end{cases}}$

(3)　$h(x)\geqq 0$ より，0 以上の定数 k を用いて $k=\int_0^1 h(t)dt$ とおけるので，$h(x)=|x^2-k|$ と表せる．

(Ⅰ)　$\sqrt{k}<1$ のとき，つまり $0\leqq k<1$ のとき

$$k=\int_0^{\sqrt{k}}(-t^2+k)dt+\int_{\sqrt{k}}^1(t^2-k)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+kt\right]_0^{\sqrt{k}}+\left[\frac{1}{3}t^3-kt\right]_{\sqrt{k}}^1$$

$$=\frac{4}{3}k\sqrt{k}-k+\frac{1}{3}$$

となるので，これを整理すると $(2\sqrt{k}-1)(2k-2\sqrt{k}-1)=0$

$0\leqq k<1$ より $k=\dfrac{1}{4}$

(Ⅱ)　$\sqrt{k}\geqq 1$ のとき，つまり $k\geqq 1$ のとき

$$k=\int_0^1(-t^2+k)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+kt\right]_0^1=-\frac{1}{3}+k$$

となるが，これを満たす k は存在しない．

以上より，$\boldsymbol{h(x)=\left|x^2-\dfrac{1}{4}\right|}$

第 12 講　試行錯誤の数列

12　次の各問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ は $a_1=0$，$a_2=1$ を満たし，$n\geqq 2$ に対して $a_n=k$ とするとき

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_{n-k}=a_n \text{ のとき}) \\ a_n & (a_{n-k}\neq a_n \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されるものとする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n\geqq 2012$ を満たす最小の自然数 m を求めよ．

(2)　l，n，d を自然数とする．このとき自然数の積 $(2l+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて

$$(2l+1)nd=\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}$$

と表せることを証明せよ．

【答】 (1) $m=176$　(2) 略

【解答】

(1)　まずは，正の整数 l に対して

「$a_n=l-1$ となる n は $\dfrac{l^2-l+2}{2}\leqq n\leqq\dfrac{l^2+l}{2}$ を満たす自然数だけに限る」 ……①

ことを以下に証明する（提言の論拠は講義中に解説）．

(Ⅰ)　$l=1$ のとき，$a_{n+1}\geqq a_n$ と $a_2=1$ より $n\geqq 2$ なる n に対して $a_n\geqq 1$ であるので，$a_1=0$ 及び $\dfrac{l^2-l+2}{2}=1$，$\dfrac{l^2+l}{2}=1$ により①は示された．

(Ⅱ)　整数 l ($\geqq 1$) に対して①を仮定すると，$n=\dfrac{l^2+l}{2}$ のとき $n-l+1=\dfrac{l^2-l+2}{2}$ より $a_{n-l+1}=l-1$ であるので，$a_n=a_{n-l+1}$ となり定義より $a_{n+1}=l$ である．つまり，$n=\dfrac{l^2+l}{2}+1=\dfrac{l^2+l+2}{2}$ のとき $a_n=l$ となる．

ここで，1 以上 l 以下のある自然数 i に対し，$n=\dfrac{l^2+l}{2}+i$ のとき $a_n=l$ であるとすると

$$\frac{l^2-l+2}{2}\leqq n-l\leqq\frac{l^2+l}{2}$$

より $a_{n-l}=l-1$ となり，定義より $a_n\neq a_{n-l}$ であるので $a_{n+1}=a_n=l$ となる．よって l に関し帰納的に

$$\frac{l^2+l+2}{2}\leqq n\leqq\frac{l^2+3l+2}{2}$$

のときに $a_n=l$ となり

$n\geqq\dfrac{(l+1)^2+(l+1)}{2}+1$ のとき $a_n>l$，$n\leqq\dfrac{(l+1)^2-(l+1)+2}{2}-1$ のときに $a_n<l$

となることにより，整式 l についても①は示された.

よって数学的帰納法により，正の整数 l に対して①は成り立つ.

上記より，まずは $\sum_{n=1}^{\frac{l^2+l}{2}} a_n$ が 2012 以上となる l を求めると

$$\sum_{n=1}^{\frac{l^2+l}{2}} a_n = 0\times1+1\times2+\cdots\cdots+(l-1)\times l$$

$$=\frac{1}{3}(l-1)l(l+1)$$

であるから $\frac{1}{3}(l-1)l(l+1)\geqq2012$ となる最小の l を求めればよいが

$$\frac{1}{3}\cdot18\cdot19\cdot20=2280$$

$$\frac{1}{3}\cdot17\cdot18\cdot19=1938$$

より，$l=19$

よって求める m は $1938+18\times\{m-(1+2+\cdots+18)\}\geqq2012$ を満たす最小の m であり，

$m=175$ のとき　$1938+18\times\{m-(1+2+\cdots+18)\}=2010$

$m=176$ のとき　$1938+18\times\{m-(1+2+\cdots+18)\}=2028$

より，求める自然数 m は　$\boldsymbol{m=176}$

(2)　$n>l$ のときは，$a=d(n-l)$，$m=2l+1$ とおき，

$n\leqq l$ のときは，$a=d(l-n+1)$，$m=2n$ とおくと，a は自然数，m は 2 以上の整数となり

a を初項，d を公差，m を項数とする等差数列の和を考えれば

$$\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}=\frac{m\{2a+(m-1)d\}}{2}=(2l+1)nd$$

となるので，題意は示された（a，m のおき方の発想については講義で解説）.

第 13 講　応用漸化式

13　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_{n+1}=2a_n+3b_n$,　$b_{n+1}=a_n+2b_n$,　$a_1=b_1=1$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n+6}{a_n+2}$,　$a_1=3$

(3)　$a_{n+2}-2a_{n+1}-8a_n=9$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

【答】 (1) $a_n=\dfrac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}}{2}$,

$b_n=\dfrac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}-(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}}{2\sqrt{3}}$

(2) $a_n=\dfrac{12(-4)^{n-1}+3}{6(-4)^{n-1}-1}$　(3) $a_n=\dfrac{4^n-(-2)^n-6}{6}$

【解答】

(1)　$a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1}=(2+\sqrt{3})a_n+(3+2\sqrt{3})b_n=(2+\sqrt{3})(a_n+\sqrt{3}\,b_n)$ より

$$a_n+\sqrt{3}\,b_n=(a_1+\sqrt{3}\,b_1)\cdot(2+\sqrt{3})^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n+\sqrt{3}\,b_n=(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

同様に $a_{n+1}-\sqrt{3}\,b_{n+1}=(2-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{3}\,b_n)$ より

$$a_n-\sqrt{3}\,b_n=(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}\quad\cdots\cdots②$$

を得る．

①，②より

$$\boldsymbol{a_n=\frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}}{2}}$$

$$\boldsymbol{b_n=\frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}-(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}}{2\sqrt{3}}}$$

(2)　与式より

$$a_{n+1}+3=\frac{a_n+6}{a_n+2}+3=\frac{4(a_n+3)}{a_n+2}\quad\cdots\cdots③$$

である．ここで，2 以上のある自然数 n で $a_n=-3$ であるとすると，③により $a_{n-1}=\cdots\cdots=a_2=a_1=-3$ となり，$a_1=3$ に矛盾．よってすべての自然数 n に対して $a_n\neq-3$ である．

ゆえに，③より

$$\frac{1}{a_{n+1}+3}=\frac{a_n+2}{4(a_n+3)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a_n+3}$$

と変形できるが，これは

$$\frac{1}{a_{n+1}+3}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_n+3}-\frac{1}{5}\right)$$

とできるので，このことより

$$\frac{1}{a_n+3}-\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{a_1+3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって

$$\boldsymbol{a_n=\frac{12(-4)^{n-1}+3}{6(-4)^{n-1}-1}}$$

を得る.

(3)　与式は $a_{n+2}+2a_{n+1}+3=4(a_{n+1}+2a_n+3)$ と変形できるので,

$$a_{n+1}+2a_n+3=(a_2+2a_1+3)\cdot 4^{n-1}=4^n$$

を得る.

また与式は $a_{n+2}-4a_{n+1}-3=-2(a_{n+1}-4a_n-3)$ と変形できるので,

$$a_{n+1}-4a_n-3=(a_2-4a_1-3)\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$$

を得る.

得られた２つの式の辺々の差をとると

$$6a_n+6=4^n-(-2)^n$$

ゆえに

$$\boldsymbol{a_n=\frac{4^n-(-2)^n-6}{6}}$$

となる.

第 14 講　漸化式の応用

14　次の各問いに答えよ．

(1)　A 銀行の住宅ローンは，最初の 10 年間の金利が年利率 3 % で，残りの期間の金利が年利率 5 % であり，B 銀行の住宅ローンは，全期間の金利が年利率 4 % である．ある人が A 銀行と B 銀行からそれぞれ 1000 万円ずつを住宅ローンで借りて，1 年後から毎年 60 万円ずつ返済するとき，20 年後のそれぞれの残高を求めよ．

ただし，A 銀行と B 銀行の住宅ローンでは，ある年の残高は前年の残高に金利分(＝残高×年利率) を加えて，返済分を引いたものである．また，$1.03^{10}=1.34$, $1.04^{10}=1.48$, $1.05^{10}=1.63$, $1.03^{20}=1.81$, $1.04^{20}=2.19$, $1.05^{20}=2.65$ として計算せよ．

(2)　関数 $f_n(x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は

$$f_1(x)=4x^2+1$$

$$f_n(x)=3x^2\int_0^1 tf'_{n-1}(t)dt+3\int_0^1 f_{n-1}(t)dt\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で，帰納的に定義されている．この $f_n(x)$ を求めよ．

【答】 (1) A 銀行の残高：319.8 万円，B 銀行の残高：405 万円

(2) $f_n(x)=2^{n+1}x^2+5\cdot3^{n-1}-2^{n+1}$

【解答】

(1)　金利が年利率 r % の場合で a_0 万円借りたときの n 年後の残高を a_n 万円とすると

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{r}{100}\right)a_n-60\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ．

①は $a_{n+1}-\dfrac{6000}{r}=\left(1+\dfrac{r}{100}\right)\left(a_n-\dfrac{6000}{r}\right)$ と変形できるので，これより

$$a_n=\frac{6000}{r}+\left(a_0-\frac{6000}{r}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

を得る．

A 銀行の最初の 10 年間は $a_0=1000$, $r=3$ とすることにより

$$\begin{aligned}a_{10}&=\frac{6000}{3}+\left(1000-\frac{6000}{3}\right)\times1.03^{10}\\&=2000-1000\times1.03^{10}\\&=2000-1000\times1.34\\&=660\ (\text{万円})\end{aligned}$$

となる．さらに $a_0=660$, $r=5$ とすることで

$$\begin{aligned}a_{10}&=\frac{6000}{5}+\left(660-\frac{6000}{5}\right)\times1.05^{10}\\&=1200-540\times1.05^{10}\\&=1200-540\times1.63\\&=\mathbf{319.8}\ (\text{万円})\end{aligned}$$

これが A 銀行での 20 年後の残高である．

B 銀行の住宅ローンの場合，$a_0=1000$，$r=4$ とすると

$$\begin{aligned} a_{20}&=\frac{6000}{4}+\left(1000-\frac{6000}{4}\right)\times1.04^{20}\\ &=1500-500\times1.04^{20}\\ &=1500-500\times2.19\\ &=\mathbf{405}\ \textbf{（万円）}\end{aligned}$$

これがB 銀行での 20年後の残高である．

(2)　$3\int_0^1 tf'_{n-1}(t)dt$，$3\int_0^1 f_{n-1}(t)dt$ は定数であるので

$$f_n(x)=a_nx^2+b_n,\ a_1=4,\ b_1=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおくことができる．このとき $f'_n(x)=2a_nx$ より

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x)&=3x^2\int_0^1 t\cdot2a_nt\,dt+3\int_0^1(a_nt^2+b_n)dt\\ &=2a_nx^2\Big[t^3\Big]_0^1+\Big[a_nt^3+3b_nt\Big]_0^1\\ &=2a_nx^2+a_n+3b_n\end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=a_n+3b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①と $a_1=4$ より $a_n=2^{n+1}$

このとき②より

$$b_{n+1}=2^{n+1}+3b_n$$

これを変形して

$$\begin{aligned} &b_{n+1}+2^{n+2}=3(b_n+2^{n+1})\\ \therefore\quad &b_n+2^{n+1}=(b_1+2^2)\cdot3^{n-1}\\ \therefore\quad &b_n=5\cdot3^{n-1}-2^{n+1}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f_n(x)=2^{n+1}x^2+5\cdot3^{n-1}-2^{n+1}}$$

第15講　漸化式と一般項の予想

15　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項はどう予想できるか.

(1)　$a_{n+1}=-2a_n+1,\quad a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=2a_n+2n-4,\quad a_1=1$

(3)　$a_{n+1}=3a_n+2^n,\quad a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=4a_n+4^n,\quad a_1=1$

(5)　$a_{n+2}-2a_{n+1}-8a_n=0,\quad a_1=0,\quad a_2=1$

(6)　$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0,\quad a_1=0,\quad a_2=1$

【答】　(1) $\dfrac{2}{3}(-2)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$　(2) $2^{n-1}-2n+2$　(3) 3^n-2^n　(4) $n4^{n-1}$　(5) $\dfrac{4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{6}$

(6) $(n-1)2^{n-2}$

【解答】

(1)　a_n の係数が -2 であることと，$a_{n+1}+2a_n$ が定数であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot(-2)^{n-1}+B$$

と予想できる.

　また，$a_1=A+B=1$，$a_2=-2A+B=-1$ より $A=\dfrac{2}{3}$，$B=\dfrac{1}{3}$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=\frac{2}{3}(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}}$$

(2)　a_n の係数が 2 であることと，$a_{n+1}-2a_n$ が n の 1 次式であることより，定数 A，B，C を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot2^{n-1}+Bn+C$$

と予想できる.

　また，$a_1=A+B+C=1$，$a_2=2A+2B+C=0$，$a_3=4A+3B+C=0$ より $A=1$，$B=-2$，$C=2$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}-2n+2}$$

(3)　a_n の係数が 3 であることと，$a_{n+1}-3a_n$ が公比 2 の等比数列であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot3^{n-1}+B\cdot2^{n-1}$$

と予想できる.

　また，$a_1=A+B=1$，$a_2=3A+2B=5$ より $A=3$，$B=-2$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=3^n-2^n}$$

(4)　a_n の係数が 4 であることと，$a_{n+1}-4a_n$ が公比 4 の等比数列であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=(An+B)\cdot4^{n-1}$$

と予想できる.

また，$a_1=A+B=1$，$a_2=8A+4B=8$ より $A=1$，$B=0$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=n4^{n-1}}$$

(5)　$x^2-2x-8=0$ の 2 解が 4 と -2 であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot 4^{n-1}+B\cdot(-2)^{n-1}$$

と予想できる．

また，$a_1=A+B=0$，$a_2=4A-2B=1$ より $A=\dfrac{1}{6}$，$B=-\dfrac{1}{6}$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=\frac{4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{6}}$$

(6)　$x^2-4x+4=0$ は 2 を重解にもつので，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}$$

と予想できる．

また，$a_1=A+B=0$，$a_2=4A+2B=1$ より $A=\dfrac{1}{2}$，$B=-\dfrac{1}{2}$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=(n-1)2^{n-2}}$$

第 16 講　数列の和と一般項

16 次の各問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{4^k}a_k=\frac{3n^2+n}{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとする. このとき a_n を求めよ. また, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ.

(2) 次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1=1,\ \frac{2^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n+1}a_ka_{n+2-k}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【答】 (1) $a_n=\dfrac{(3n-1)4^n}{n(n+1)}$, $S_n=\dfrac{4(4^n-n-1)}{n+1}$　(2) $a_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$

【解答】

(1) $n=1$ のとき $\dfrac{1\cdot 2}{4^1}a_1=\dfrac{3\times 1^2+1}{2}$　　$\therefore\ a_1=4$

$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{n(n+1)}{4^n}a_n=\frac{3n^2+n}{2}-\frac{3(n-1)^2+(n-1)}{2}$$

$$=3n-1$$

$$\therefore\ a_n=\frac{(3n-1)4^n}{n(n+1)}$$

よって　$a_n=\begin{cases}4 & (n=1)\\ \dfrac{(3n-1)4^n}{n(n+1)} & (n\geqq 2)\end{cases}=\boldsymbol{\dfrac{(3n-1)4^n}{n(n+1)}}\quad (n\geqq 1)$

このとき　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(3k-1)4^k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{4^k}{k}+\dfrac{4^{k+1}}{k+1}\right)=-\dfrac{4^1}{1}+\dfrac{4^{n+1}}{n+1}=\boldsymbol{\dfrac{4(4^n-n-1)}{n+1}}$

(2) 一般項を　$a_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$　……①　と予想する.

$n=1$ のとき $a_1=1$, $\dfrac{1}{0!}=1$ より①は成り立つ.

$n=l(\geqq 1)$ のとき $a_j=\dfrac{1}{(j-1)!}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ を仮定すると

$$\frac{2^l}{l!}=\sum_{k=1}^{l+1}a_ka_{l+2-k}=2a_1a_{l+1}+\sum_{k=2}^{l}a_ka_{l+2-k}$$

より

$$a_{l+1}=\frac{2^{l-1}}{l!}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{l}a_ka_{l+2-k}$$

$$=\frac{2^{l-1}}{l!}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{l}\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{(l+1-k)!}$$

$$=\frac{2^{l-1}}{l!}-\frac{1}{2l!}\sum_{k=2}^{l}\frac{l!}{(k-1)!(l+1-k)!}$$

$$=\frac{1}{2l!}\left(2^l-\sum_{k=2}^{l}{}_lC_{k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2l!}\{2^l-(2^l-2)\}=\frac{1}{l!}$$

となるので，$n=l+1$ のときにも①は成り立つ.

よって数学的帰納法により

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{(n-1)!}}\quad (n\geqq 1)$$

が示された.

第17講　和について

17　次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+l)$　(l は自然数)

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^k$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-2)2^k}{k(k+1)(k+2)}$

【答】 (1) $\dfrac{n}{2n+1}$　(2) $\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$　(3) $\dfrac{1}{l+2}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+l+1)$

(4) $(n-1)2^{n+1}+2$　(5) $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}-1$

【解答】

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+l)$

$\displaystyle=\frac{1}{l+2}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+l+1)-(k-1)k(k+1)\cdots\cdots(k+l)\}$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{l+2}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+l+1)}$

$\displaystyle\left(=\frac{(n+l+1)!}{(l+2)(n-1)!}\right)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^k=\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)2^{k+1}-(k-2)2^k\}=\boldsymbol{(n-1)2^{n+1}+2}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-2)2^k}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2^{k+1}}{(k+1)(k+2)}-\frac{2^k}{k(k+1)}\right\}=\boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}-1}$

第18講　確率と数列

18　次の各問いに答えよ．

(1)　赤玉2球，白玉8球が入った袋がある．この袋から玉を同時に2球取り出し，赤玉は手元に置き，白玉は袋に返すという試行を繰り返す．n 回の試行の後，袋に赤玉が2球残っている確率を p_n，1球残っている確率を q_n とする．

(i)　p_1，q_1 を求めよ．

(ii)　q_2 を求めよ．

(iii)　p_n，q_n を p_{n-1}，q_{n-1} を用いて表せ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

(2)　ある1面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている．平面に接する面（底面）の4辺のうち1辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う．ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする．この操作を n 回（n は自然数）続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく．

(i)　a_2 を求めよ．

(ii)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け．

(iii)　b_n を n の式で表せ．

【答】　(1) (i) $p_1=\dfrac{28}{45}$，$q_1=\dfrac{16}{45}$　(ii) $q_2=\dfrac{112}{225}$　(iii) $p_n=\dfrac{28}{45}p_{n-1}$，$q_n=\dfrac{16}{45}p_{n-1}+\dfrac{7}{9}q_{n-1}$

(2) (i) $a_2=\dfrac{1}{2}$　(ii) $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+1$　(iii) $b_n=\dfrac{1}{6}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

【解答】

(1)　(i)　$p_1=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\mathbf{\dfrac{28}{45}}$，$q_1=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\mathbf{\dfrac{16}{45}}$

(ii)　1回目の試行後に赤玉が2球残っている状態から赤1つと白1つを取り出す場合と，1回目の試行後に赤玉が1つ残っている状態から白2つを取り出す場合を考えればよいので

$$q_2=p_1\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}+q_1\times\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$$

$$=\frac{28}{45}\times\frac{16}{45}+\frac{16}{45}\times\frac{7}{9}=\mathbf{\frac{112}{225}}$$

(iii)　n 回目の試行後に赤玉が2球残っているのは $n-1$ 回目に赤玉が2球残っている状態から白2つ取り出す場合しかないので

$$p_n=p_{n-1}\times\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{p_n=\frac{28}{45}p_{n-1}}$$

n 回目に赤玉が1球残っているのは(ii)と同様に考えて

$$\boldsymbol{q_n=\frac{16}{45}p_{n-1}+\frac{7}{9}q_{n-1}}$$

(2)　(i)　1回目には印のついた面が側面にくるので $a_1=1$

印のついた面が側面にあるとき，印のついた側面と底面の共有する辺と隣り合う辺を

選んだ場合のみ次に印のついた面が側面にくるので

$$a_2=a_1\times\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(ii)　n 回目の操作の後に印が上面にくる確率は $1-a_n-b_n$ である.

このとき，$n+1$ 回目の操作の後に印のついた面が側面にくるのは，n 回目の操作の後に印のついた面が上面にある場合はどの辺を選んでも次に印のついた面が側面にきて，n 回目の操作の後に印のついた面が側面にある場合は(i)と同様に考え，n 回目の操作の後に印のついた面が底面にある場合はどの辺を選んでも次に印のついた面が側面にくるので

$$a_{n+1}=(1-a_n-b_n)\times1+a_n\times\frac{2}{4}+b_n\times1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1}$$

(iii)　$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$ を変形して

$$a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\quad a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって

$$a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

また，n 回目の操作の後に印のついた面が底面にあるには，$n-1$ 回目の操作の後に印のついた面が側面にあり，印のついた側面と底面の共有する辺を選ぶ場合であるので，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

であるが，これは $n=1$ のときにも成り立つ.

第19講　数学的帰納法

19　次の各問いに答えよ.

(1)　数列 a_1, a_2, ……, a_{n+1} において, $2\leqq j\leqq n$ を満たすすべての自然数 j に対して

不等式 (A)　$a_j\geqq\dfrac{a_{j-1}+a_{j+1}}{2}$

が成り立つとき, $2\leqq k\leqq n$ を満たすすべての自然数 k に対して

不等式 (B)　$a_k\geqq\dfrac{a_1+(k-1)a_{k+1}}{k}$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

(2)　$0<x<y$ のとき, 次の問いに答えよ.

(イ)　$0<\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}<\dfrac{y-x}{2}$ を証明せよ.

(ロ)　$x_1=\sqrt{xy}$, $y_1=\dfrac{x+y}{2}$, $x_2=\sqrt{x_1y_1}$, $y_2=\dfrac{x_1+y_1}{2}$, ……

, $x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$, $y_n=\dfrac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$

と順次定めるとき

$$0<y_n-x_n<\frac{y-x}{2^n}$$

であることを証明せよ.

【答】　略

【解答】

(1)　$k=2$ とすると

$$a_2-\frac{a_1+(2-1)\cdot a_3}{2}=a_2-\frac{a_1+a_3}{2}\geqq 0 \qquad \text{((A)より)}$$

であるから(B)は成り立つ. ここで $k=l$ $(2\leqq l\leqq n-1)$ のとき

$a_l\geqq\dfrac{a_1+(l-1)a_{l+1}}{l}$　……①　が成り立つと仮定すると

$$a_{l+1}-\frac{a_1+la_{l+2}}{l+1}\geqq a_{l+1}-\frac{a_1+l(2a_{l+1}-a_l)}{l+1} \qquad \text{((A)より)}$$

$$=\frac{l}{l+1}\left\{a_l-\frac{a_1+(l-1)a_{l+1}}{l}\right\}\geqq 0 \qquad \text{(①より)}$$

よって $a_{l+1}\geqq\dfrac{a_1+la_{l+2}}{l+1}$ となり $k=l+1$ のときにも(B)が成り立つ.

よって数学的帰納法により(B)は示された.

(2)　(イ)　$0<x<y$ より $\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\dfrac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2}{2}>0$

また, $\dfrac{y-x}{2}-\left(\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right)=\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})>0$ より

$0<\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}<\dfrac{y-x}{2}$ が示された.

(ロ)　$n=1$ のとき，(イ)により　$0<y_n-x_n<\dfrac{y-x}{2^n}$　……②　は成り立つ．

ここで $n=k(\geqq 1)$ のとき $0<y_k-x_k<\dfrac{y-x}{2^k}$ が成り立つと仮定すると

$$y_{k+1}-x_{k+1}=\frac{x_k+y_k}{2}-\sqrt{x_k y_k}$$

となるが，

x_n と y_n の定め方により帰納的に $x_k>0$，$y_k>0$ となることと，仮定より $x_k<y_k$ であることから，(イ)と同様に

$$\frac{x_k+y_k}{2}-\sqrt{x_k y_k}>0$$

これより

$$0<x_{k+1}<y_{k+1}$$

となる．よって(イ)より

$$0<\frac{x_k+y_k}{2}-\sqrt{x_k y_k}<\frac{y_k-x_k}{2}$$

となるが，仮定より

$$0<\frac{x_k+y_k}{2}-\sqrt{x_k y_k}<\frac{y-x}{2^{k+1}}$$

よって

$$\frac{y_k-x_k}{2}<\frac{1}{2}\cdot\frac{y-x}{2^k}=\frac{y-x}{2^{k+1}}$$

が成り立つので

$$0<y_{k+1}-x_{k+1}<\frac{y-x}{2^{k+1}}$$

ゆえに $n=k+1$ のときにも②は成り立つ．

よって数学的帰納法により②は示された．

第20講　ベクトルでの計算

20　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の点Ｐ及び定点Ａ，Ｂに対して

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3|\overrightarrow{AP}|^2$$

が成り立っているとき，点Ｐの軌跡を求めよ．

(2)　平面上の三角形ABCに対して点Ｐが

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}\geqq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}$$

を満たしているとき，点Ｐの描く図形を図示せよ．

(3)　平面上の点Ｐ及び定点 A_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{A_kP}|^2$ の最小値を求めよ．

【答】　(1) 線分ABを1：5に外分する点を中心とする半径 $\dfrac{1}{4}$AB の円　(2) 略

(3) $-\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}\right|^2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{OA_k}|^2$

【解答】

(1)　与式より

$$\begin{aligned}3|\overrightarrow{AP}|^2-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}&=3|\overrightarrow{AP}|^2-\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\\&=2|\overrightarrow{AP}|^2+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=2\left(\left|\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right|^2-\frac{1}{16}|\overrightarrow{AB}|^2\right)=0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\left|\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|$$

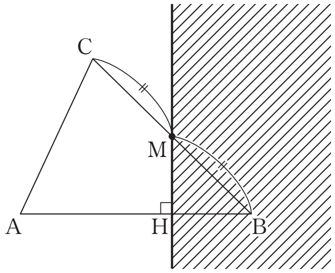
よって求める軌跡は，**線分ABを1：5に外分する点を中心とする半径 $\dfrac{1}{4}$AB の円**．

(2)　与式より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}&=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})\\&=2\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AP}-\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)\geqq 0\end{aligned}$$

ここで，辺BCの中点をＭとするとこの式は $2\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM})\geqq 0$　よって

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP}\geqq 0$ となるので，Ｍから直線ABに下ろした垂線の足をＨとするとき，求める領域は直線MHを含む下図斜線部分．



(3)　O を平面上の点として

$$\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{P}}|^2=\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|^2)$$

$$=n|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|^2$$

$$=n\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\right|^2-\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|^2$$

よって求める最小値は，$\boldsymbol{-\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|^2}$

第21講　球の取り扱い

21　原点をO(0, 0, 0)とし，空間の3点をA(0, −2, 2)，B(1, 1, 1)，C(0, 0, 1)とする．点Cを中心とする半径1の球をSとして，S上の点をPとする．またxy平面上の点をQ(X, Y, 0)とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$X=Y=1$としたとき，直線AQと球面Sとの2つの交点を，点Aに近い方からP_1，P_2とする．このとき，$AP_1:P_1P_2:P_2Q$を求めよ．

(2)　点Pが3点O，A，Bで定まる平面上を動くとき，点Pの軌跡はある点を中心とする円になる．この円の中心と半径を求めよ．また，点Pのz座標のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　点Pは$CP\perp AP$を満たしながら動くとする．点Qが直線AP上にあるとき，点Qの軌跡を求めよ．

【答】　(1) $(4-\sqrt{2}):2\sqrt{2}:(3-\sqrt{2})$　(2) 中心$\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{6},\ \dfrac{5}{6}\right)$，半径$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，$0\leqq z\leqq\dfrac{5}{3}$

(3) 平面$z=0$上の放物線$y=\dfrac{x^2-1}{2}$

【解答】

(1)　直線AQ上の点は実数tを用いて$(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OQ}=(t,\ 3t-2,\ -2t+2)$と表せ，この点と点Cとの距離が1であるので

$$(t-0)^2+(3t-2-0)^2+(-2t+2-1)^2=1$$
$$7t^2-8t+2=0$$
$$\therefore\quad t=\frac{4\pm\sqrt{2}}{7}$$

よって

$$AP_1:P_1P_2:P_2Q=\frac{4-\sqrt{2}}{7}:\left(\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{4-\sqrt{2}}{7}\right):\left(1-\frac{4+\sqrt{2}}{7}\right)$$
$$=\boldsymbol{(4-\sqrt{2}):2\sqrt{2}:(3-\sqrt{2})}$$

(2)　点Cから3点O，A，Bで定まる平面に下ろした垂線の足をHとすると，Hは題意の円の中心である．Hは平面OAB上の点より，実数α，βを用いて，$\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$と表せ，$CH\perp OA$より

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$=\alpha|\overrightarrow{OA}|^2+\beta\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0\quad\cdots\cdots①$$

また$CH\perp OB$より同様に

$$\alpha\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\beta|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=0\quad\cdots\cdots②$$

を得る．

ここで$|\overrightarrow{OA}|^2=8$，$|\overrightarrow{OB}|^2=3$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=2$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=1$であるので，①と②より

$$8\alpha-2=0,\ 3\beta-1=0 \qquad \therefore\quad \alpha=\frac{1}{4},\ \beta=\frac{1}{3}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{6},\ \dfrac{5}{6}\right)$

ゆえに円の中心は

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{\frac{1}{3},\ -\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}}\right)$$

また，三角形 PHC は $\angle\mathrm{PHC}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形になるので，円の半径は

$$\mathrm{HP}=\sqrt{\mathrm{CP}^2-\mathrm{CH}^2}=\mathbf{\frac{\sqrt{30}}{6}}$$

次に $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおく．P は平面 OAB 上の点より実数 s，t を用いて，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(t,\ -2s+t,\ 2s+t)$ と表せるので

$$\begin{cases} x=t & \cdots\cdots③ \\ y=-2s+t & \cdots\cdots④ \\ z=2s+t & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

となる．また，CP＝1 より　$x^2+y^2+(z-1)^2=1$　……⑥　を得る．
③〜⑤より $-2x+y+z=0$ すなわち $y=2x-z$ となるが，これを⑥に代入して

$$x^2+(2x-z)^2+(z-1)^2=1$$
$$5x^2-4zx+2z^2-2z=0$$

よって，x が実数であることより，判別式を考えて

$$(-2z)^2-5(2z^2-2z)\geqq 0$$
$$-2z(3z-5)\geqq 0$$
$$\therefore\quad \mathbf{0\leqq z\leqq \frac{5}{3}}$$

(3)　$\mathrm{CP}\perp\mathrm{AP}$ であるので $\angle\mathrm{CAP}=\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta\\ &=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\\ &=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2}\end{aligned}$$

より

$$(X,\ Y+2,\ -2)\cdot(0,\ 2,\ -1)=\sqrt{X^2+(Y+2)^2+(-2)^2}\sqrt{5-1}$$
$$Y+3=\sqrt{X^2+(Y+2)^2+4}$$
$$Y+3\geqq 0 \text{ かつ } (Y+3)^2=X^2+(Y+2)^2+4$$
$$Y=\frac{X^2-1}{2} \text{ かつ } Y\geqq -3$$

となるので，点 Q の軌跡は

平面 $z=0$ 上の放物線 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$

第22講　三角形の五心とベクトル

22 実数 α, β に対して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．次の各条件を満たす α と β の値を求めよ．ただし，(2)と(5)では $\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ を用いよ．

(1)　P は三角形 ABC の重心

(2)　P は三角形 ABC の内心

(3)　P(＝H) は三角形 ABC の垂心

(4)　P は三角形 ABC の外心

(5)　P は直線 AB に関して点 C と反対側にある傍心

【答】 (1) $\alpha=\beta=\dfrac{1}{3}$　(2) $\alpha=\dfrac{b}{a+b+c}$，$\beta=\dfrac{c}{a+b+c}$

(3) $\alpha=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}(|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$，$\beta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$

(4) $\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{2\{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2\}}$，$\beta=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2(|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{2\{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2\}}$

(5) $\alpha=\dfrac{b}{a+b-c}$，$\beta=-\dfrac{c}{a+b-c}$

【解答】

(1)　辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると，P は線分 MC 上の点より実数 u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{AM}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}(1-u)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せ，また P は線分 BN 上の点より実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AN}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せる．

よって

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1-u)=1-t\\[2mm] u=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$$

より，$t=\dfrac{2}{3}$，$u=\dfrac{1}{3}$ を得る．

ゆえに

$$\boldsymbol{\alpha=\beta=\frac{1}{3}}$$

(2)　直線 AP は $\angle\mathrm{CAB}$ を二等分するので，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b}\right)=\frac{k}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{k}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せ，直線 BP は $\angle\mathrm{ABC}$ を二等分するので，実数 l を用いて

$$\overrightarrow{BP}=l\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{c}+\frac{\overrightarrow{BC}}{a}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{AP}=\left(1-\frac{l}{c}-\frac{l}{a}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{l}{a}\overrightarrow{AC}$

と表せる．

よって $\begin{cases}\dfrac{k}{c}=1-\dfrac{l}{c}-\dfrac{l}{a}\\ \dfrac{k}{b}=\dfrac{l}{a}\end{cases}$ より，$k=\dfrac{bc}{a+b+c}$，$l=\dfrac{ca}{a+b+c}$ を得る．

ゆえに

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{b}{a+b+c},\ \beta=\frac{c}{a+b+c}}$$

(3)　CH⊥AB より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=(\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\alpha|\overrightarrow{AB}|^2+\beta\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{aligned}$$

BH⊥AC より同様に

$$\alpha\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\beta|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

を得るので，これら 2 式より

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}(|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2},\ \beta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}(|\overrightarrow{AB}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}}$$

(4)　辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とすると，MP⊥AB より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\left(\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\alpha|\overrightarrow{AB}|^2+\beta\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=0\end{aligned}$$

NP⊥AC より同様に

$$\alpha\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\beta|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=0$$

を得るので，これら 2 式より

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{|\overrightarrow{AC}|^2(|\overrightarrow{AB}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{2\{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2\}},\ \beta=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2(|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{2\{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2\}}}$$

(5)　直線 AP は ∠CAB の外角を二等分するので，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{AP}=k\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{-\overrightarrow{AC}}{b}\right)=\frac{k}{c}\overrightarrow{AB}-\frac{k}{b}\overrightarrow{AC}$$

と表せ，直線 BP は ∠ABC の外角を二等分するので，実数 l を用いて

$$\overrightarrow{BP}=l\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{c}+\frac{-\overrightarrow{BC}}{a}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(1-\dfrac{l}{c}+\dfrac{l}{a}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\dfrac{l}{a}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

と表せる．よって

$$\begin{cases}\dfrac{k}{c}=1-\dfrac{l}{c}+\dfrac{l}{a}\\[2mm] -\dfrac{k}{b}=-\dfrac{l}{a}\end{cases}$$

より，$k=\dfrac{bc}{a+b-c}$，$l=\dfrac{ca}{a+b-c}$ を得る．

ゆえに

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{b}{a+b-c},\qquad \beta=-\frac{c}{a+b-c}}$$

第 23 講　ベクトルの利用法

23 次の各問いに答えよ．

(1) 平面上の 2 点を A(2, 4)，C(6, 3) とする．点 P が C を中心とする半径 2 の円周上を動くとき，AP の長さを最小にする点 P の座標を求めよ．

(2) 平面上の点を B(−4, 3) とし，$3x+4y-25\geqq 0$ で表される領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，BP の長さが最小となるような点 P の座標を求めよ．

(3) 原点 O と異なる点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ に対して，点 P は O を端点とする半直線 OQ 上にあり，$\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ}=r(>0)$ を満たしているとする．このとき点 P の座標を求めよ．

(4) 空間の 2 点を A(5, 3, 7)，C(8, 1, 9) とする．点 P が C を中心とする半径 2 の球面上を動くとき，AP の長さを最小にする点 P の座標を求めよ．

【答】 (1) $\mathrm{P}\left(6-\dfrac{8}{\sqrt{17}},\ 3+\dfrac{2}{\sqrt{17}}\right)$　(2) P(−1, 7)　(3) $\mathrm{P}\left(\dfrac{rX}{X^2+Y^2},\ \dfrac{rY}{X^2+Y^2}\right)$

(4) $\mathrm{P}\left(8-\dfrac{6}{\sqrt{17}},\ 1+\dfrac{4}{\sqrt{17}},\ 9-\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(-4,\ 1)$ より $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{17}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{2}{\sqrt{17}}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{2}{\sqrt{17}}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(6-\dfrac{8}{\sqrt{17}},\ 3+\dfrac{2}{\sqrt{17}}\right)$

ゆえに $\mathbf{P}\left(\mathbf{6-\dfrac{8}{\sqrt{17}},\ 3+\dfrac{2}{\sqrt{17}}}\right)$

(2) 直線 $3x+4y-25=0$ の法線ベクトルは (3, 4) より，求める点は

$(x,\ y)=(-4,\ 3)+k(3,\ 4)=(3k-4,\ 4k+3)$ と表せる．

この点が直線 $3x+4y-25=0$ 上にあるので，$3(3k-4)+4(4k+3)-25=0$　∴　$k=1$

よって求める点は **P(−1, 7)**

(3) 原点 O に関して P と Q は同じ方向より $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{r}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　（$\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ}=r$ より）

ゆえに $\mathbf{P}\left(\dfrac{\boldsymbol{rX}}{\boldsymbol{X^2+Y^2}},\ \dfrac{\boldsymbol{rY}}{\boldsymbol{X^2+Y^2}}\right)$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(-3,\ 2,\ -2)$ より $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{17}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{2}{\sqrt{17}}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{2}{\sqrt{17}}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(8-\dfrac{6}{\sqrt{17}},\ 1+\dfrac{4}{\sqrt{17}},\ 9-\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$

ゆえに $\mathbf{P}\left(\mathbf{8-\dfrac{6}{\sqrt{17}},\ 1+\dfrac{4}{\sqrt{17}},\ 9-\dfrac{4}{\sqrt{17}}}\right)$

第24講　空間での垂線の足

24 空間内の4点をA(1，2，1)，B(3，1，1)，C(1，3，2)，D(6，6，−2)とし，3点A，B，Cを通る平面をα，点Dから平面αに下ろした垂線の足をHとする．次の各問いに答えよ．

(1) 四面体DABCの体積を求めよ．

(2) 平面α上にあり，中心がAで半径が1の円周上を点Qが動くものとする．線分DQの長さが最大となるとき，AQ：QHを求めよ．

【答】 (1) $\dfrac{19}{6}$　(2) AQ：QH$=3:(3+\sqrt{89})$

【解答】

(1) Hはα上の点より実数α，βを用いて$\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$と表せる．DH⊥ABより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=(\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\alpha|\overrightarrow{AB}|^2+\beta\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

となる．

またDH⊥ACより同様に

$$\alpha\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\beta|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0\quad\cdots\cdots②$$

を得る．

ここで$\overrightarrow{AB}=(2,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{AD}=(5,\ 4,\ -3)$より$|\overrightarrow{AB}|^2=5$，$|\overrightarrow{AC}|^2=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=6$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=1$となるので，①と②はそれぞれ

$$5\alpha-\beta-6=0,\quad -\alpha+2\beta-1=0$$

よって

$$\alpha=\frac{13}{9},\quad \beta=\frac{11}{9}$$

このとき$\overrightarrow{DH}=\left(-\dfrac{19}{9},\ -\dfrac{38}{9},\ \dfrac{38}{9}\right)$より$|\overrightarrow{DH}|=\dfrac{19}{3}$

△ABCの面積は$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{3}{2}$となるので，求める体積は

$$\frac{3}{2}\times\frac{19}{3}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{19}{6}}$$

(2) 点Hに対して

$$|\overrightarrow{AH}|^2=|\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}|^2=\alpha^2|\overrightarrow{AB}|^2+2\alpha\beta\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\beta^2|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{89}{9}>1$$

より，Hは平面α上で点Aを中心とする半径1の円の外部にある．よって，AH$=\dfrac{\sqrt{89}}{3}$であることより，求める点QはAHを$1:\left(1+\dfrac{\sqrt{89}}{3}\right)$に外分する点となる．

ゆえに求める比は

$$\mathbf{AQ:QH=3:(3+\sqrt{89})}$$

練習問題解答

第1講　2次方程式の解の配置

1　k を実数の定数とする．x の2次方程式 $x^2-2kx-k^2+2k=0$ が $0<x\leqq 2$ に少なくとも1つ実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．

【選択肢】

㋐　$-1-\sqrt{5}\leqq k<0,\ 1<k<2$

㋑　$-1-\sqrt{5}<k\leqq 0,\ 1<k<2$

㋒　$-1-\sqrt{5}\leqq k<0,\ 1\leqq k<2$

【答】　㋒

【解答】

$f(x)=x^2-2kx-k^2+2k$ とおくと，$f(x)=(x-k)^2-2k(k-1)$ より $f(0)=-k(k-2)$，$f(2)=-k^2-2k+4$，$f(k)=-2k(k-1)$ である．

(Ⅰ)　$k\leqq 0$ のとき

$f(0)<0$ かつ $f(2)\geqq 0$ となればよいので，$-k(k-2)<0$ かつ $-k^2-2k+4\geqq 0$ と条件 $k\leqq 0$ より，$-1-\sqrt{5}\leqq k<0$

(Ⅱ)　$0<k<2$ のとき

$f(k)\leqq 0$ かつ「$f(0)>0$ または $f(2)\geqq 0$」となればよい．

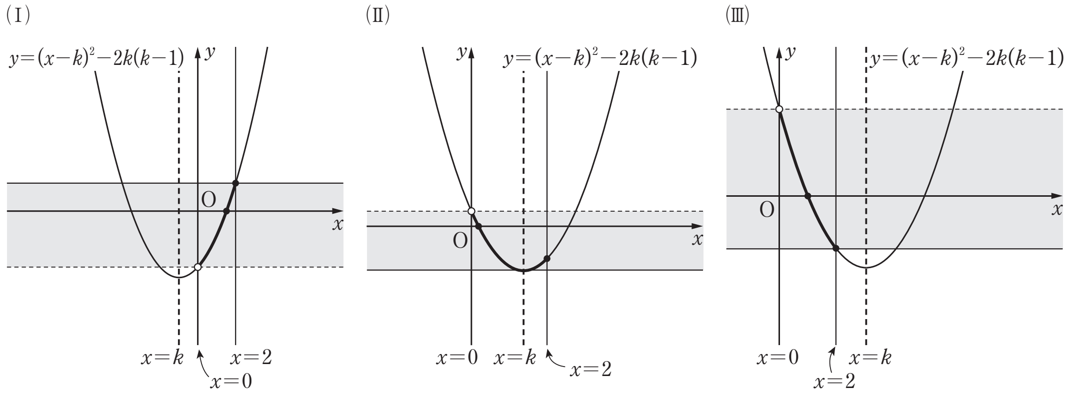
$0<k<2$ のとき $f(0)>0$ となるので，$-2k(k-1)\leqq 0$ と条件 $0<k<2$ より，

$1\leqq k<2$

(Ⅲ)　$k\geqq 2$ のとき

$f(0)>0$ かつ $f(2)\leqq 0$ となればよいが，$k\geqq 2$ のとき $f(0)=-k(k-2)\leqq 0$ となるので条件を満たす k は存在しない．

以上より，求める条件は　$\boldsymbol{-1-\sqrt{5}\leqq k<0,\ 1\leqq k<2}$



第２講　絶対値付き２次方程式の解の個数

2　関数 $f(x)=x^2+x-5|x-1|$ について，$f(x)=k$ （k は定数）の異なる実数解の個数を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\begin{cases} 4 & (0 \leqq k \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (-15<k<0,\ k>1 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=-15 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<-15 \text{ のとき}) \end{cases}$

㋑ $\begin{cases} 4 & (1<k<2 \text{ のとき}) \\ 3 & (k=1,\ 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (-14<k<1,\ k>2 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=-14 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<-14 \text{ のとき}) \end{cases}$

㋒ $\begin{cases} 4 & (1 \leqq k \leqq 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (-14<k<1,\ k>2 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=-14 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<-14 \text{ のとき}) \end{cases}$

【答】　㋑

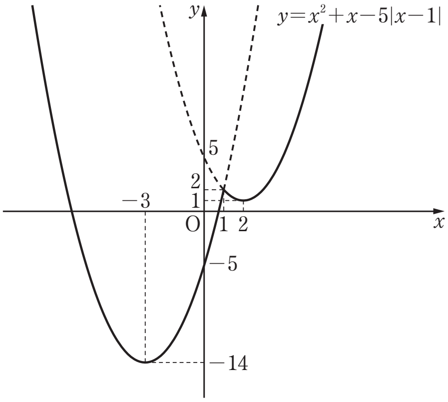
【解答】

与式より

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-5(x-1) & (x-1 \geqq 0) \\ x^2+x+5(x-1) & (x-1<0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2-4x+5 & (x \geqq 1) \\ x^2+6x-5 & (x<1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (x-2)^2+1 & (x \geqq 1) \\ (x+3)^2-14 & (x<1) \end{cases}$$



となり，$f(1)=2$ であるので，異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} \mathbf{4} & (\mathbf{1<k<2} \text{ のとき}) \\ \mathbf{3} & (\mathbf{k=1,\ 2} \text{ のとき}) \\ \mathbf{2} & (\mathbf{-14<k<1,\ k>2} \text{ のとき}) \\ \mathbf{1} & (\mathbf{k=-14} \text{ のとき}) \\ \mathbf{0} & (\mathbf{k<-14} \text{ のとき}) \end{cases}$$

第３講　加法定理について…

3　n を自然数とするとき

$$\sin\theta+\sin2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

であることを示せ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

【答】　略

【解答】

$n=1$ のとき，(左辺)$=\sin\theta$，(右辺)$=\dfrac{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\sin\theta$ より与式は成り立つ．

$n=k(\geqq1)$ のとき

$$\sin\theta+\sin2\theta+\cdots\cdots+\sin k\theta=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\sin\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

を仮定すると

$$\sin\theta+\sin2\theta+\cdots\cdots+\sin k\theta+\sin(k+1)\theta-\frac{\sin\frac{(k+1)+1}{2}\theta\sin\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\sin\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\sin(k+1)\theta-\frac{\sin\frac{(k+1)+1}{2}\theta\sin\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\sin\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}+\sin(k+1)\theta-\frac{\left(\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{k+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta\left(\sin\frac{k}{2}\theta-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{k+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}+\sin(k+1)\theta-\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=\sin\frac{k+1}{2}\theta\left(\sin\frac{k}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{k}{2}\theta\right)+\sin(k+1)\theta-\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=-\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta+\sin(k+1)\theta-\sin\frac{k+1}{2}\theta\cos\frac{k+1}{2}\theta$$

$$=0$$

となり，$n=k+1$ のときにも与式は成り立つ．

よって数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して与式は示された．

第4講　三角関数の合成（応用編）

4　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき関数 $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}+x^2-1$ のとり得る値の範囲を求めよ．

【選択肢】

㋐　$-1 \leqq f(x) \leqq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　㋑　$-1 \leqq f(x) < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　㋒　$-1 < f(x) \leqq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

【答】　㋐

【解答】

条件 $0 \leqq x \leqq 1$ より，$x=\cos\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}+\cos^2\theta-1 \\ &= 2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta \\ &= \sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

このとき $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}\right)$ を満たす実数 α を用いて

$$f(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta+\alpha)-\frac{1}{2}$$

と表せるので，

$$\alpha \leqq 2\theta+\alpha \leqq \pi+\alpha$$

に注意すると，$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$ において最大値 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ をとり，

$2\theta+\alpha=\pi+\alpha$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)$ は最小値 -1 をとる．

$f(x)$ は連続であるから，$f(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{-1 \leqq f(x) \leqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

第５講　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の求め方

5　次の空欄を適切な数でうめよ．

$\sin 36^\circ = a$ とおくと

$$\cos 72^\circ = \boxed{} - \boxed{}\,a^2$$

$$\sin 108^\circ = -\boxed{}\,a^3 + \boxed{}\,a$$

であり

$$\sin 180^\circ = \boxed{}\,a^5 - 20a^3 + \boxed{}\,a$$

となる．これより

$$a = \sqrt{\frac{5-\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}}$$

を得る．

【選択肢】

㋐　上から順に　2，4，3，16，5，5，8，1

㋑　上から順に　1，2，4，3，16，5，5，8

㋒　上から順に　16，5，5，8，1，2，4，3

【答】　㋑

【解答】

$36^\circ = \theta$ とおくと，$\sin\theta = a$

$$\cos 72^\circ = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = \mathbf{1} - \mathbf{2}a^2$$

$$\sin 108^\circ = \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = -\mathbf{4}a^3 + \mathbf{3}a$$

ここで

$$\begin{aligned}\cos 3\theta\sin 2\theta &= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\cdot 2\sin\theta\cos\theta\\ &= 2\sin\theta(4\cos^2\theta - 3)\cos^2\theta\\ &= 2a\{4(1-a^2)-3\}(1-a^2)\\ &= 8a^5 - 10a^3 + 2a\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\sin 180^\circ &= \sin 5\theta = \sin(3\theta + 2\theta)\\ &= \sin 3\theta\cos 2\theta + \cos 3\theta\sin 2\theta\\ &= (-4a^3+3a)(1-2a^2) + 8a^5 - 10a^3 + 2a\\ &= \mathbf{16}a^5 - 20a^3 + \mathbf{5}a\end{aligned}$$

$\sin 180^\circ = 0$ より $16a^5 - 20a^3 + 5a = 0$ となるが，$a \neq 0$ より $16a^4 - 20a^2 + 5 = 0$

$$\therefore\quad a^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$$

さらに，$0 < a = \sin 36^\circ < \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$a^2 < \frac{1}{2}$ であるから，$a = \sqrt{\frac{5-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{8}}}$

第６講　桁数などの計算

6　近似値 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ を利用して次の問いに答えよ．

(1)　18^{35} の桁数を求めよ．

(2)　18^{35} の最高位の数を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　43 桁　㋑　44 桁　㋒　45 桁　　(2)　㋐　6　㋑　7　㋒　8

【答】 (1)　㋑　(2)　㋒

【解答】

条件より

$$\begin{cases} \log_{10}2=0.3010 & \Longleftrightarrow \quad 2=10^{0.3010} \\ \log_{10}3=0.4771 & \Longleftrightarrow \quad 3=10^{0.4771} \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} 18 &= 2\times 3^2 \\ &= 10^{0.3010}\times(10^{0.4771})^2 \\ &= 10^{1.2552} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} 18^{35} &= (10^{1.2552})^{35} \\ &= 10^{43.9320} \end{aligned}$$

である．

(1)　$10^{43}<18^{35}<10^{44}$ より，18^{35} は

44 桁

(2)　$8=2^3=10^{0.9030}$，$9=3^2=10^{0.9542}$ より

$$10^{43.9030}<10^{43.9320}<10^{43.9542}$$

$$8\times 10^{43}<18^{35}<9\times 10^{43}$$

よって

18^{35} の最高位の数は 8

第7講　3次の極値などについて

7　a は0でない実数とする．関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となるような a の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a=\pm1$　　㋑　$a=\pm\frac{1}{2}$　　㋒　$a=\pm2$

【答】　㋐

【解答】

与式より

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$
$$=3x^3-3\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2-4x+4\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

これより

$$f'(x)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$$

である．$f'(x)$ の2次の係数が正で $f'(0)<0$ より $f(x)=0$ は異なる2つの実数解をもつが，それらを α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，2次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{2}{3}\left(a-\frac{1}{a}\right),\qquad \alpha\beta=-\frac{4}{9}$$

このとき

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\frac{4}{9}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{16}{9}$$

ここで，$x=\alpha$，$x=\beta$ のときそれぞれ極大値，極小値をとるので

$$f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)dx$$
$$=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=9\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3$$
$$=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{4}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}$$

となり，ゆえに求める a の値は $a-\dfrac{1}{a}=0$ より　$\boldsymbol{a=\pm1}$

第8講　接線の本数と実数解の個数

8 点 $(X,\ Y)$ から曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ に引いた接線の本数を求めよ.

【選択肢】

㋐
- 1 ： $Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$
  または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき
- 2 ： $Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$ のとき
- 3 ： $\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$
  または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

㋑
- 1 ： $Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$
  または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき
- 2 ： $X\neq -\dfrac{b}{3a}$ かつ
  「$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$」のとき
- 3 ： $\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$
  または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

㋒
- 1 ： $X=-\dfrac{b}{3a}$
  または「$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$」
  または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき
- 2 ： $X\neq -\dfrac{b}{3a}$ かつ
  「$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$」のとき
- 3 ： $\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$
  または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

【答】 ㋒

【解答】

$y'=3ax^2+2bx+c$ より接点を $(t,\ at^3+bt^2+ct+d)$ とすると，この点における接線は

$$y=(3at^2+2bt+c)(x-t)+at^3+bt^2+ct+d$$

ゆえに

$$y=(3at^2+2bt+c)x-2at^3-bt^2+d$$

となる．これが点 $(X,\ Y)$ を通るので

$$Y=(3at^2+2bt+c)X-2at^3-bt^2+d$$

この式を t に関して整理すると

$$2at^3+(b-3aX)t^2-2bXt+Y-cX-d=0$$

となり，求める接線の本数は，この t に関する 3 次方程式の異なる実数解の個数に一致する．

$$f(t)=2at^3+(b-3aX)t^2-2bXt+Y-cX-d$$

とおくと，

$$f'(t)=6at^2+2(b-3aX)t-2bX=2(3at+b)(t-X)$$

であるから

(Ⅰ)　$-\dfrac{b}{3a}=X$ のとき

常に $f'(t)\geqq 0$ または常に $f'(t)\leqq 0$ となるので，$f(t)=0$ の異なる実数解の個数は 1

(Ⅱ)　$-\dfrac{b}{3a}\neq X$ のとき

$-\dfrac{b}{3a}$ と X のうち一方を α，他方を β としたとき，$f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗		↘		↗

または

t	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘		↗		↘

となるので，

$f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)f(X)>0$ のとき，$f(t)=0$ の異なる実数解の個数は 1

$f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)f(X)=0$ のとき，$f(t)=0$ の異なる実数解の個数は 2

$f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)f(X)<0$ のとき，$f(t)=0$ の異なる実数解の個数は 3

(Ⅰ)，(Ⅱ)と

$$f\left(-\frac{b}{3a}\right)f(X)=\left\{Y-\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)X+\frac{b^3}{27a^2}-d\right\}(Y-aX^3-bX^2-cX-d)$$

より，求める個数は

1　：$X=-\dfrac{b}{3a}$

または「$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$」

または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

2　：$X\neq-\dfrac{b}{3a}$ かつ

「$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

3　：$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$

または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

第9講　置き換えて3次，解の個数など

9　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において定数 a がいろいろな値をとるとき，
方程式 $2\sin 3\theta - 2\cos 2\theta - 1 = a$ の解の個数がどのように変わるかを調べよ．

【選択肢】

㋐
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a > 3 \text{ のとき}\right) \\ 1 & (a = 3 \text{ のとき}) \\ 2 & \left(\dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} \leqq a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 5 & (a = -1 \text{ のとき}) \\ 6 & \left(-1 < a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

㋑
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a \geqq 3 \text{ のとき}\right) \\ 2 & \left(a = \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} < a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 6 & \left(-1 \leqq a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27}\right) \end{cases}$$

㋒
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a > 3 \text{ のとき}\right) \\ 1 & (a = 3 \text{ のとき}) \\ 2 & \left(a = \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} < a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 5 & (a = -1 \text{ のとき}) \\ 6 & \left(-1 < a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

【答】 ㋒

【解答】

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$，$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より

$$\begin{aligned} 2\sin 3\theta - 2\cos 2\theta - 1 &= 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) - 2(1 - 2\sin^2\theta) - 1 \\ &= -8\sin^3\theta + 4\sin^2\theta + 6\sin\theta - 3 \end{aligned}$$

である．

$\sin\theta=t$ とおくと, 与式は $-8t^3+4t^2+6t-3=a$, また $0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq t\leqq 1$ となる.
ここで $f(t)=-8t^3+4t^2+6t-3$ とおくと

$$f'(t)=-24t^2+8t+6$$

よって $f(t)$ の増減は

t	-1	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	3	↘		↗		↘	-1

となる. このとき

$$f(t)=f'(t)\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{18}\right)+\frac{40}{9}t-\frac{8}{3}$$

より

$$f\left(\frac{1\pm\sqrt{10}}{6}\right)=\frac{40}{9}\cdot\frac{1\pm\sqrt{10}}{6}-\frac{8}{3}=\frac{-52\pm20\sqrt{10}}{27}\quad(\text{複号同順})$$

また

$$3-\frac{-52+20\sqrt{10}}{27}=\frac{133-20\sqrt{10}}{27}>\frac{133-20\times4}{27}>0$$

$$\frac{-52-20\sqrt{10}}{27}-(-1)=\frac{-25-20\sqrt{10}}{27}<0$$

より

$$\frac{-52-20\sqrt{10}}{27}<-1<\frac{-52+20\sqrt{10}}{27}<3$$

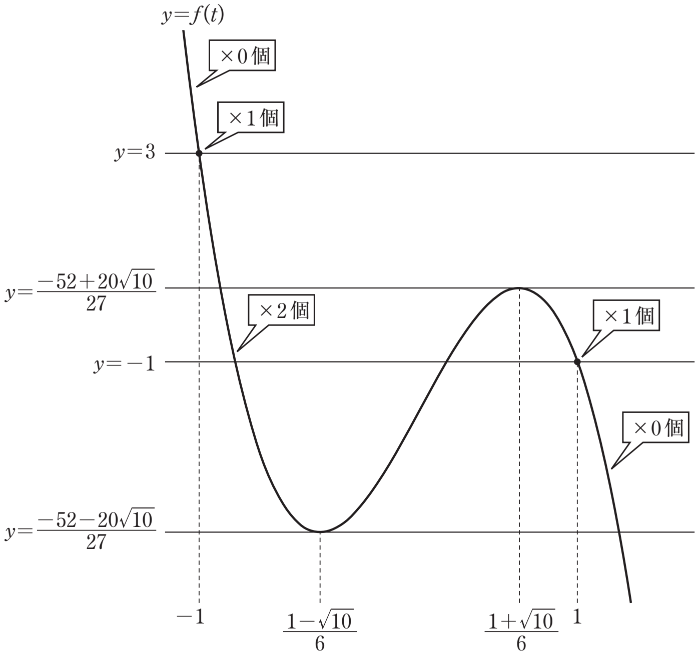
である.

また, θ に関する方程式 $t=\sin\theta$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases}0 & (t<-1,\ t>1\text{ のとき})\\ 1 & (t=\pm1\text{ のとき})\\ 2 & (-1<t<1\text{ のとき})\end{cases}$$

となるので, 上記の増減を考えると解の個数は

$$\begin{cases}\mathbf{0} & \left(a<\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a>3\text{ のとき}\right)\\ \mathbf{1} & (a=3\text{ のとき})\\ \mathbf{2} & \left(a=\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27}<a<3\text{ のとき}\right)\\ \mathbf{4} & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27}<a<-1,\ a=\dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27}\text{ のとき}\right)\\ \mathbf{5} & (a=-1\text{ のとき})\\ \mathbf{6} & \left(-1<a<\dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27}\text{ のとき}\right)\end{cases}$$



y=f(t)
×0個
×1個
y=3
y=(−52+20√10)/27
×2個
×1個
y=−1
×0個
y=(−52−20√10)/27
−1
(1−√10)/6
(1+√10)/6
1

第10講　面積の公式

10　座標平面上で原点を通る直線と $y=x|x+2|$ のグラフが相異なる3点で交わっている．このグラフと直線によって囲まれる図形で，この直線より下側にあるものの面積を S_1，上側にあるものの面積を S_2 とする．$S_1：S_2=9：8$ となるとき，この直線の傾きを求めよ．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{8}{9}$　㋑ $\dfrac{1}{2}$　㋒ $\dfrac{1}{3}$

【答】 ㋑

【解答】

直線の傾きを m とする．$x|x+2|=mx$ とすると

$$\begin{cases} x \geqq -2 \quad \text{かつ} \quad x(x+2)=mx \\ x<-2 \quad \text{かつ} \quad -x(x+2)=mx \end{cases}$$

すなわち
$$\begin{cases} x \geqq -2 \quad \text{かつ} \quad x(x+2-m)=0 \\ x<-2 \quad \text{かつ} \quad x(x+2+m)=0 \end{cases}$$

すなわち
$$\begin{cases} x \geqq -2 \quad \text{かつ} \quad x=0,\ m-2 \\ x<-2 \quad \text{かつ} \quad x=-m-2 \end{cases}$$

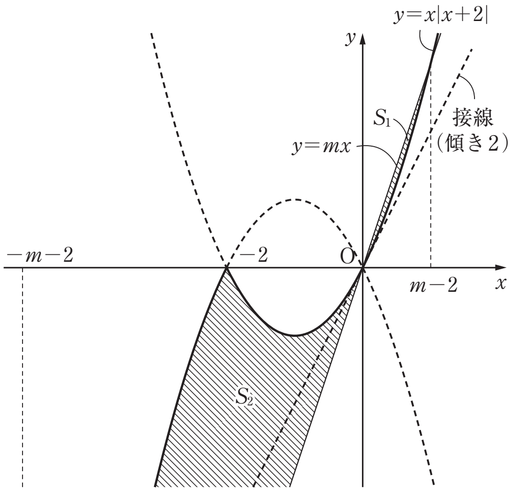
よって，グラフと直線が異なる3点で交わる条件は

$$-m-2<-2 \quad \text{かつ} \quad m-2 \geqq -2 \quad \text{かつ} \quad m-2 \neq 0$$

$$\therefore \quad 0<m<2,\ m>2$$

(Ⅰ)　$m>2$ のとき，$-m-2<-2<0<m-2$ より

$$S_1=\int_0^{m-2}\{mx-x(x+2)\}dx$$
$$=\frac{1}{6}(m-2)^3$$



$$S_2=\int_{-m-2}^{0}\{x|x+2|-mx\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}\{x^2+(2-m)x\}dx$$
$$+\int_{-m-2}^{-2}\{-x^2-(2+m)x\}dx$$
$$=\int_{-m-2}^{0}\{-x^2-(2+m)x\}dx$$
$$-2\int_{-2}^{0}\{-x(x+2)\}dx$$
$$=\frac{1}{6}\{0-(-m-2)\}^3-2\times\frac{1}{6}\{0-(-2)\}^3$$
$$=\frac{1}{6}(m+2)^3-\frac{8}{3}$$

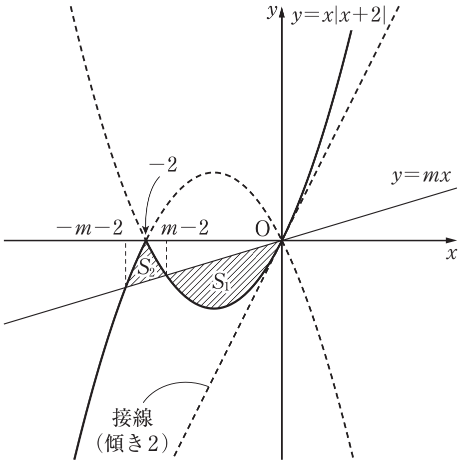
このとき

$$S_2=\frac{1}{6}\{(m-2)+4\}^3-\frac{8}{3}$$

$$>\frac{1}{6}(m-2)^3+\frac{4^3}{6}-\frac{8}{3}>S_1$$

であるから，$S_1:S_2=9:8$ にはならない．

(Ⅱ)　$0<m<2$ のとき，$-m-2<-2<m-2<0$ より



$$S_1=\int_{m-2}^{0}\{mx-x(x+2)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}(-m+2)^3$$

$$S_2=\int_{-m-2}^{-2}\{-x^2-(2+m)x\}dx+\int_{-2}^{m-2}\{x^2+(2-m)x\}dx$$

$$=\int_{-m-2}^{0}\{-x^2-(2+m)x\}dx-2\int_{-2}^{0}\{-x(x+2)\}dx+S_1$$

$$=\frac{1}{6}(m+2)^3-2\times\frac{1}{6}\times2^3+\frac{1}{6}(-m+2)^3$$

$$=2m^2$$

このとき $S_1:S_2=9:8$ より

$$8S_1=9S_2$$

$$8\cdot\frac{1}{6}(-m+2)^3=9\cdot2m^2$$

$$2m^3+15m^2+24m-16=0$$

$$(2m-1)(m+4)^2=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{1}{2}$$

以上により，求める直線の傾きは $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

第 11 講　絶対値付き積分

11　$f(t)=\int_0^1|x^2-2tx|dx$ とおくとき, $f(t)$ の最小値と, 最小値を与える t の値を求めよ.

【選択肢】

㋐　$t=0$,　最小値 $\frac{1}{3}$　　㋑　$t=\frac{1}{4}$,　最小値 $\frac{1}{8}$　　㋒　$t=\frac{\sqrt{2}}{4}$,　最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

【答】　㋒

【解答】

(Ⅰ)　$t\leqq 0$ のとき

$$f(t)=\int_0^1(x^2-2tx)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2\right]_0^1$$
$$=-t+\frac{1}{3}$$

(Ⅱ)　$0<t<\frac{1}{2}$ のとき

$$f(t)=\int_0^{2t}\{-(x^2-2tx)\}dx+\int_{2t}^1(x^2-2tx)dx$$
$$=\frac{1}{6}(2t-0)^3+\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2\right]_{2t}^1$$
$$=\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}$$

(Ⅲ)　$t\geqq\frac{1}{2}$ のとき

$$f(t)=\int_0^1\{-(x^2-2tx)\}dx$$
$$=t-\frac{1}{3}\qquad((Ⅰ)より)$$

ここで

$$\left(\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}\right)'=8t^2-1$$

であるから, (Ⅰ)〜(Ⅲ)より $f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	-1		$-$	0	$+$		1
$f(t)$	↘		↘	最小	↗		↗

となるので, 最小値は

$$\boldsymbol{t=\frac{\sqrt{2}}{4}} \text{ のとき }\quad f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{2}}{6}}$$

第12講　試行錯誤の数列

12　実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す．$a_m=[\sqrt{m}]$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，数列 b_1，b_2，b_3，…… を $b_1=0$，$k\geqq 2$ のとき $a_m<k\leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k=m$ と定める．次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対して

$$\sum_{m=1}^{n^2}a_m+\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3$$

が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]$ を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$b_k=k^2-1$　　㋑　$b_k=k^2$　　㋒　$b_k=k^2+1$

(3)　㋐　$\dfrac{1}{6}n(4n^2-6n+8)$　　㋑　$\dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$　　㋒　$\dfrac{1}{6}n(4n^2+3n-1)$

【答】 (1) ㋐　(2) 略　(3) ㋑

【解答】

(1)　$l^2\leqq m<(l+1)^2$ $(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$l\leqq\sqrt{m}<l+1 \qquad \therefore\quad [\sqrt{m}]=l$$

よって $l^2\leqq m<(l+1)^2$ のとき $a_m=l$ となる．

ゆえに，$k\geqq 2$ のとき

$$a_m<k\leqq a_{m+1}\ \text{ならば}\ a_m<k,\ a_{m+1}\geqq k$$
$$m<k^2,\ k^2\leqq m+1$$
$$\therefore\quad k^2-1\leqq m<k^2$$

m は整数より，$m=k^2-1$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_k=k^2-1}\quad(\text{これは }k=1\text{ のときにも成り立つ})$$

(2)　(1)より $a_m=l$ となる項は $2l+1$ 項あるので，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n^2}a_m&=\sum_{l=1}^{n-1}l\cdot(2l+1)+n\\&=2\sum_{l=1}^{n-1}l^2+\sum_{l=1}^{n-1}l+n\\&=\frac{n}{3}(n-1)(2n-1)+\frac{n}{2}(n-1)+n\\&=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)\end{aligned}$$

$a_1=1$ であるから，これは $n=1$ のときにも成り立つ．

また

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (k^2-1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n$$
$$= \frac{1}{6}n(2n^2+3n-5)$$

よって

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^{n} b_k = n^3$$

(3)　(2)より，$\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}] = \sum_{m=1}^{n} a_m = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)}$

≪別解≫

(2)　(Ⅰ)　$n=1$ のとき，$\sum_{m=1}^{1} a_m + \sum_{k=1}^{1} b_k = a_1+b_1 = 1+0 = 1$ 及び $1^3=1$ より，与式は成り立つ.

(Ⅱ)　$n=i$ のとき与式が成り立つと仮定すると，

(1)より $b_k=k^2-1$，$i^2 \leqq m \leqq (i+1)^2-1$ のとき $a_m=i$ であるから

$\sum_{m=1}^{i^2} a_m + \sum_{k=1}^{i} b_k = i^3$ より

$$\sum_{m=1}^{(i+1)^2} a_m + \sum_{k=1}^{i+1} b_k$$
$$= \sum_{m=1}^{i^2} a_m + \sum_{k=1}^{i} b_k + \sum_{m=i^2}^{(i+1)^2-1} a_m - a_{i^2} + a_{(i+1)^2} + b_{i+1}$$
$$= i^3 + \sum_{m=i^2}^{(i+1)^2-1} i - a_{i^2} + a_{(i+1)^2} + b_{i+1}$$
$$= i^3 + i(2i+1) - i + (i+1) + \{(i+1)^2-1\}$$
$$= i^3+3i^2+3i+1$$
$$= (i+1)^3$$

となり，$n=i+1$ のときにも与式は成り立つ.

よって，数学的帰納法により与式は示された.

(3)　(1)より $a_m=l$ となる項は $2l+1$ 項あるので，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}] = \sum_{m=1}^{n^2} a_m$$
$$= \sum_{l=1}^{n-1} l(2l+1)+n$$
$$= 2\sum_{l=1}^{n-1} l^2 + \sum_{l=1}^{n-1} l + n$$
$$= \frac{n}{3}(n-1)(2n-1) + \frac{n}{2}(n-1) + n$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)}$$

$a_1=1$ であるから，これは $n=1$ のときにも成り立つ.

第13講　応用漸化式

13　次の各問いに答えよ.

(1)　次の文中の **あ** ～ **え** にあてはまる数や式を答えよ.

$a_1=5$, $a_{n+1}=\dfrac{7a_n-9}{a_n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ には次の関係式が成り立つ.

$$\frac{1}{a_{n+1}-\boxed{あ}}=\frac{\boxed{い}}{a_n-\boxed{あ}}+\frac{1}{\boxed{う}}\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

これより, 一般項 a_n は, $a_n=\boxed{え}$ となる.

(2)　次式

$$\begin{cases} a_1=1 \\ b_1=-1 \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} a_{n+1}=4a_n-2b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

により, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が定義されているとする. すべての自然数 n に対し $a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$ を満たす定数 p, q を2組求めることによって, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐　(あ)　1,　(い)　2,　(う)　3,　(え)　$\dfrac{n+3}{2n+1}$

㋑　(あ)　2,　(い)　3,　(う)　2,　(え)　$\dfrac{2n+5}{n+2}$

㋒　(あ)　3,　(い)　1,　(う)　4,　(え)　$\dfrac{3n+7}{n+1}$

(2)　㋐　$(p, q)=(-2, 2), (-1, 3)$, $a_n=4\cdot3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}$, $b_n=2\cdot3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}$

㋑　$(p, q)=(2, -2), (1, -3)$, $a_n=4(-3)^{n-1}-3(-2)^{n-1}$, $b_n=2(-3)^{n-1}-3(-2)^{n-1}$

㋒　$(p, q)=(2, 2), (1, 3)$, $a_n=4\cdot3^{n-1}-3(-2)^{n-1}$, $b_n=2\cdot3^{n-1}-3(-2)^{n-1}$

【答】　(1) ㋒　(2) ㋐

【解答】

(1)　与式より

$$a_{n+1}-3=\frac{7a_n-9}{a_n+1}-3$$
$$=\frac{4(a_n-3)}{a_n+1}$$

となるが, これと $a_1=5$ より帰納的に $a_n\neq3$　よって

$$\frac{1}{a_{n+1}-3}=\frac{a_n+1}{4(a_n-3)}$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{a_n-\mathbf{3}}+\frac{1}{\mathbf{4}}$$

ゆえに数列 $\left\{\frac{1}{a_n-3}\right\}$ は初項 $\frac{1}{a_1-3}=\frac{1}{2}$，公差 $\frac{1}{4}$ の等差数列となるので

$$\frac{1}{a_n-3}=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{n+1}{4}$$
$$\therefore\quad a_n-3=\frac{4}{n+1}$$

ゆえに

$$a_n=\frac{4}{n+1}+3=\boldsymbol{\frac{3n+7}{n+1}}$$

(2)　与式より

$$\begin{cases} a_{n+1}=4a_n-2b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=a_n+b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①＋②×p を計算すると，

$$a_{n+1}+pb_{n+1}=(4a_n-2b_n)+p(a_n+b_n)$$
$$=(4+p)a_n+(-2+p)b_n$$

この右辺が $q(a_n+pb_n)$ と一致するので

$$\begin{cases} 4+p=q \\ -2+p=pq \end{cases}\quad \text{すなわち}\quad \begin{cases} 4+p=q \\ -2+p=p(4+p) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4+p=q \\ (p+1)(p+2)=0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{(p,\ q)=(-2,\ 2),\ (-1,\ 3)}$$

よって $a_{n+1}-2b_{n+1}=2(a_n-2b_n)$ より

$$a_n-2b_n=(a_1-2b_1)\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}\quad\cdots\cdots③$$

$a_{n+1}-b_{n+1}=3(a_n-b_n)$ より

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}\quad\cdots\cdots④$$

④－③より

$$\boldsymbol{b_n=2\cdot 3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}$$

④×2－③より

$$\boldsymbol{a_n=4\cdot 3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}$$

第14講　漸化式の応用

14　ある会社が，プロ野球のハチロー選手に対して，公式戦で二塁打を1本打つとそのたびに10万円の賞金を出すこととした．そこでハチロー選手は

(Ⅰ)　1本目については賞金の40％

(Ⅱ)　n 本目（$n \geqq 2$）については，$n-1$ 本目までの賞金総額のうち手元に残った金額と n 本目の賞金10万円との合計の40％

を慈善事業への寄付金にあてることとした．ハチロー選手は手元に残った賞金には手をつけないものとする．寄付金の合計額がはじめて100万円を超えるときの二塁打の総本数を求めよ．

【選択肢】

㋐　10本　　㋑　11本　　㋒　12本

【答】　㋒

【解答】

n 本目までの寄付金の合計額を a_n 万円とする．$a_1 = 10 \times 0.4 = 4$ である．

$n-1$ 本目までの賞金総額は

$$10(n-1) \quad 万円$$

であるので，$n-1$ 本目に手元に残った金額は

$$10(n-1) - a_{n-1} \quad 万円$$

よって

$$a_n = \{10(n-1) - a_{n-1} + 10\} \times 0.4 + a_{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{3}{5}a_{n-1} + 4n$$

この式は

$$a_n - 10n + 15 = \frac{3}{5}\{a_{n-1} - 10(n-1) + 15\}$$

と変形できるので

$$a_n - 10n + 15 = (a_1 - 10 \times 1 + 15) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = 9\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 10n - 15$$

ここで，$9\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \leqq 9$ より，寄付金の合計額が100万円を超えるためには

$$10n - 15 > 91 \qquad \therefore \quad n \geqq 11$$

が必要で，このとき

$$9\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \leqq 9\left(\frac{3}{5}\right)^{11-1}$$

$$< 9\left(\frac{3}{5}\right)^{5} = \frac{2187}{3125} < 1$$

よって　$a_n>100$ となるとき

$$10n-15\geqq 100$$

$$\therefore \quad n\geqq 11.5$$

ゆえに，求める総本数は **12 本**.

第 15 講　漸化式と一般項の予想

15　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項はどう予想できるか.

(1)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$,　$a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=3a_n+2n-1$,　$a_1=1$

(3)　$a_{n+1}=4a_n+3^n$,　$a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=2a_n+2^n$,　$a_1=2$

(5)　$a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=6$

(6)　$a_{n+2}+6a_{n+1}+9a_n=0$,　$a_1=0$,　$a_2=1$

【選択肢】

(1)　㋐　$\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$　㋑　$2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　㋒　$\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

(2)　㋐　$2\cdot3^{n-1}-n$　㋑　$2\cdot3^{n}-2n-3$　㋒　$3^{n-1}-n+1$

(3)　㋐　$-2\cdot4^{n-1}+3^n$　㋑　4^n-3^n　㋒　$4^n-3^{n-1}-3$

(4)　㋐　$n2^n$　㋑　$(n+3)2^{n-3}$　㋒　$(n+1)2^{n-1}$

(5)　㋐　$2^{n-1}-(-4)^{n-1}$　㋑　$3\cdot2^{n-1}-2(-4)^{n-1}$　㋒　$2^{n+1}+(-4)^n$

(6)　㋐　$(n-1)(-3)^{n-1}$　㋑　$(n-1)(-3)^{n-2}$　㋒　$(n-1)(-3)^n$

【答】　(1) ㋑　(2) ㋐　(3) ㋑　(4) ㋒　(5) ㋐　(6) ㋑

【解答】

(1)　a_n の係数が $\frac{1}{2}$ であることと，$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$ が定数であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+B$$

と予想できる.

また，$a_1=A+B=1$，$a_2=\frac{1}{2}A+B=\frac{3}{2}$ より $A=-1$，$B=2$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

(2)　a_n の係数が 3 であることと，$a_{n+1}-3a_n$ が n の 1 次式であることより，定数 A，B，C を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot3^{n-1}+Bn+C$$

と予想できる.

また，$a_1=A+B+C=1$，$a_2=3A+2B+C=4$，$a_3=9A+3B+C=15$ より $A=2$，$B=-1$，$C=0$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}-n}$$

(3)　a_n の係数が 4 であることと，$a_{n+1}-4a_n$ が公比 3 の等比数列であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot4^{n-1}+B\cdot3^{n-1}$$

と予想できる．

また，$a_1=A+B=1$，$a_2=4A+3B=7$ より $A=4$，$B=-3$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=4^n-3^n}$$

(4)　a_n の係数が 2 であることと，$a_{n+1}-2a_n$ が公比 2 の等比数列であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=(An+B)\cdot2^{n-1}$$

と予想できる．

また，$a_1=A+B=2$，$a_2=4A+2B=6$ より $A=B=1$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=(n+1)2^{n-1}}$$

(5)　$x^2+2x-8=0$ の 2 解が -4 と 2 であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot(-4)^{n-1}+B\cdot2^{n-1}$$

と予想できる．

また，$a_1=A+B=0$，$a_2=-4A+2B=6$ より $A=-1$，$B=1$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}-(-4)^{n-1}}$$

(6)　$x^2+6x+9=0$ は -3 を重解にもつので，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=(An+B)\cdot(-3)^{n-1}$$

と予想できる．

また，$a_1=A+B=0$，$a_2=-6A-3B=1$ より $A=-\dfrac{1}{3}$，$B=\dfrac{1}{3}$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=(n-1)(-3)^{n-2}}$$

第 16 講　数列の和と一般項

16　任意の自然数 n に対して，関係式

$$3a_{n+1}=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_1$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ について，$a_1=1$ のとき，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ について $S_{2m}<\dfrac{39}{32}$ が成り立つような自然数 m の最小値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$m=8$　　㋑　$m=6$　　㋒　$m=4$

【答】　㋒

【解答】

与式と与式の n に $n-1$ を代入した式

$$3a_{n+1}=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_1$$
$$3a_n=\qquad a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-2}a_1$$

の辺々を加えると

$$3a_{n+1}+3a_n=a_n \qquad \therefore\quad a_{n+1}=-\frac{2}{3}a_n\quad (n\geqq 2)\quad\cdots\cdots①$$

与式において $n=1$ とすると

$$3a_2=a_1 \qquad \therefore\quad a_2=\frac{1}{3}a_1$$

①より

$$a_n=-\frac{2}{3}a_{n-1}=\cdots\cdots=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}a_2$$
$$=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}a_1$$

$a_1=1$ より $n\geqq 2$ の n に対しては

$$a_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

よって

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} & (n\geqq 2)\\ 1 & (n=1)\end{cases}$$

ここで，$n\geqq 2$ のとき

$$S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$
$$=1+\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$
$$=\frac{1}{5}\left\{6-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

となるので，$2m \geqq 2$ より

$$S_{2m}=\frac{1}{5}\left\{6-\left(-\frac{2}{3}\right)^{2m-1}\right\}=\frac{1}{5}\left\{6+\left(\frac{2}{3}\right)^{2m-1}\right\}<\frac{39}{32}$$

したがって $\left(\frac{2}{3}\right)^{2m-1}<\frac{3}{32}$ となり，これを整理すると $2^{2m+4}<3^{2m}$　　$\therefore$　$16\cdot4^m<9^m$

$m=1$，2 のとき $16\cdot4^m>9^m$ となる．

$m=3$ のとき $16\cdot4^m=1024$，$9^m=729$

$m=4$ のとき $16\cdot4^m=4096$，$9^m=6561$

よって，求める m は

$$\boldsymbol{m=4}$$

第17講　和について

17　次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 2^k$

【選択肢】

(1) ㋐ $\sqrt{n+1}-1$　㋑ $\sqrt{n+2}-1$　㋒ $\sqrt{n}-1$

(2) ㋐ $(n^2-2n+3)2^n-2$　㋑ $(n^2-2n+3)2^{n+1}-6$　㋒ $(n^2-2n-3)2^n+10$

【答】 (1) ㋐　(2) ㋑

【解答】

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\boldsymbol{\sqrt{n+1}-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 2^k=\sum_{k=1}^{n}[\{(k+1)^2-4(k+1)+6\}2^{k+1}-(k^2-4k+6)2^k]=\boldsymbol{(n^2-2n+3)2^{n+1}-6}$

第18講　確率と数列

18　座標平面上に4点A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1)を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x軸と平行な方向の移動について確率p，y軸と平行な方向の移動について確率$1-p$で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n秒後に頂点Aにいる確率をa_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$とする．a_{2n}を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1-(2p-1)^{2n}\}$　　㋑　$a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n}\}$

㋒　$a_{2n}=\dfrac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n-1}\}$

【答】　㋑

【解答】

(1)　n秒後にQがB, C, Dにいる確率をそれぞれb_n, c_n, d_nとすると

$$a_1=c_1=0,\qquad b_1=1-p,\qquad d_1=p$$

である．

よって2秒後にA, Cにいる確率は

$$\begin{aligned}a_2&=(1-p)b_1+pd_1\\&=(1-p)^2+p^2\\&=2p^2-2p+1\\c_2&=pb_1+(1-p)d_1\\&=p(1-p)+(1-p)p\\&=-2p^2+2p\end{aligned}$$

また4秒後にAにいる確率は

2秒後にAにいるときには

A → D → A

A → B → A

2秒後にCにいるときには

C → D → A

C → B → A

の各場合を考えて

$$\begin{aligned}a_4&=\{p^2+(1-p)^2\}a_2+\{(1-p)p+p(1-p)\}c_2\\&=(2p^2-2p+1)a_2+(-2p^2+2p)c_2\quad\cdots\cdots(*)\\&=(2p^2-2p+1)(2p^2-2p+1)+(-2p^2+2p)(-2p^2+2p)\\&=8p^4-16p^3+12p^2-4p+1\end{aligned}$$

$c_4 = 1 - a_4$

$\quad = -8p^4 + 16p^3 - 12p^2 + 4p$

（＊）より帰納的に $a_{2(n+1)} = (2p^2 - 2p + 1)a_{2n} + (-2p^2 + 2p)(1 - a_{2n})$ すなわち

$$a_{2(n+1)} = (4p^2 - 4p + 1)a_{2n} + (-2p^2 + 2p)$$

を得るので，これを変形すると

$$a_{2(n+1)} - \frac{1}{2} = (2p-1)^2\left(a_{2n} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad a_{2n} - \frac{1}{2} = \left(a_0 - \frac{1}{2}\right)\cdot(2p-1)^{2n}$$

$a_0 = 1$ より

$$\boldsymbol{a_{2n} = \frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^{2n}\}}$$

第 19 講　数学的帰納法

19　n 個の実数 x_i ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) について $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqq n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

【答】　略

【解答】

$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=x_1{}^2,\qquad (\text{右辺})=1\cdot x_1{}^2$$

より成り立つ．

$n=k(\geqq 1)$ のとき $\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 \leqq k\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
(k+1)\sum_{i=1}^{k+1} x_i{}^2-\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)^2 &= (k+1)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2+x_{k+1}{}^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{k} x_i+x_{k+1}\right)^2\\
&= (k+1)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2+x_{k+1}{}^2\right)-\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2+2x_{k+1}\sum_{i=1}^{k} x_i+x_{k+1}{}^2\right\}\\
&= (k+1)\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2+(k+1)x_{k+1}{}^2-\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2-2x_{k+1}\sum_{i=1}^{k} x_i-x_{k+1}{}^2\\
&\geqq (k+1)\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2+(k+1)x_{k+1}{}^2-k\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2-2x_{k+1}\sum_{i=1}^{k} x_i-x_{k+1}{}^2\\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i{}^2+kx_{k+1}{}^2-2x_{k+1}\sum_{i=1}^{k} x_i\\
&= \sum_{i=1}^{k} (x_i{}^2+x_{k+1}{}^2-2x_{k+1}x_i)\\
&= \sum_{i=1}^{k} (x_i-x_{k+1})^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときにも与式は成り立つ．

よって帰納的に与式は示された．

第20講　ベクトルでの計算

20　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の点Ｐ及び定点Ａ，Ｂに対して

$$8\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}\leqq|\overrightarrow{AP}|^2+4|\overrightarrow{BP}|^2$$

が成り立っているとき，点Ｐの存在領域を求めよ．

(2)　平面上の三角形ABCに対して点Ｐが

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$$

を満たしているとき，点Ｐの軌跡を求めよ．

(3)　n 個の正の実数の列 a_1，a_2，……，a_n と，それをでたらめに並べ替えた実数の列 b_1，b_2，……，b_n を考え，n 個の組 $(a_1,\ b_1)$，$(a_2,\ b_2)$，……，$(a_n,\ b_n)$ をつくる．これらを xy 平面上の点 P_1，P_2，……，P_n の座標とし，それぞれの点から，原点Ｏを通るある直線 l へ下ろした垂線の足を Q_1，Q_2，……，Q_n とする．このとき

$$D=\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{Q_kP_k}|^2$$

の最小値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　点Ａを中心とする半径ABの円の周及び内部

㋑　点Ａを中心とする半径 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$AB の円の周及び内部

㋒　点Ａを中心とする半径2ABの円の周及び内部

(2)　㋐　直線BCに垂直で点Ａを通る直線　　㋑　直線ABに垂直で点Ｃを通る直線

㋒　直線CAに垂直で点Ｂを通る直線

(3)　㋐　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2$　　㋑　$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2$　　㋒　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2$

【答】　(1) ㋑　(2) ㋐　(3) ㋑

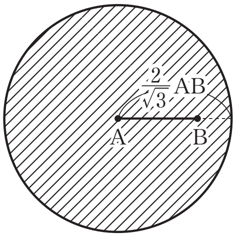
【解答】

(1)　$8\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}\leqq|\overrightarrow{AP}|^2+4|\overrightarrow{BP}|^2$ より始点をＡにそろえて整理すると

$$8\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\leqq|\overrightarrow{AP}|^2+4|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}|^2$$

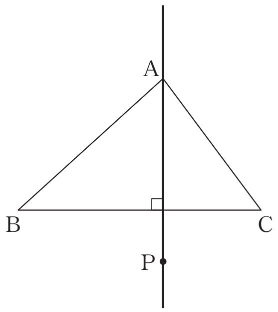
$$8|\overrightarrow{AP}|^2-8\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}\leqq5|\overrightarrow{AP}|^2-8\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+4|\overrightarrow{AB}|^2$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2\leqq\frac{4}{3}|\overrightarrow{AB}|^2$$



よって $|\overrightarrow{AP}|\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{AB}|$ となるので，点Ｐの存在領域は

点Ａを中心とする半径 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$AB の円の周及び内部.



(2)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$ より $\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})$

よって $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$ となるので

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

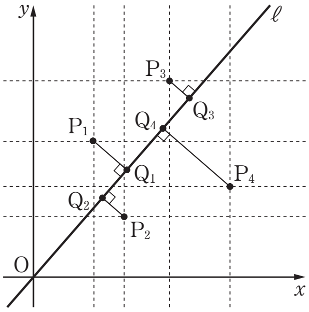
ゆえに点Pの軌跡は，**直線BCに垂直で点Aを通る直線**.

(3)　直線 l の大きさ1の方向ベクトルを $\vec{l}$ としたとき，実数 α_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を用いて $\overrightarrow{OQ_k}=\alpha_k\vec{l}$ と表せる．ここで

$$\overrightarrow{P_kQ_k}\cdot\vec{l}=(\overrightarrow{OQ_k}-\overrightarrow{OP_k})\cdot\vec{l}=(\alpha_k\vec{l}-\overrightarrow{OP_k})\cdot\vec{l}$$
$$=\alpha_k-\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{l}\qquad(|\vec{l}|^2=1\text{ より})$$

であり，$\overrightarrow{P_kQ_k}\perp\vec{l}$ よりこの値が0となるので，$\alpha_k=\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{l}$

このとき



$$D=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k\vec{l}-\overrightarrow{OP_k}|^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k{}^2|\vec{l}|^2-2\alpha_k\times\vec{l}\cdot\overrightarrow{OP_k}+|\overrightarrow{OP_k}|^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-\alpha_k{}^2+|\overrightarrow{OP_k}|^2)$$
$$(|\vec{l}|^2=1,\ \vec{l}\cdot\overrightarrow{OP_k}=\alpha_k\text{ より})$$

ここで，$\vec{l}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<\pi)$ と表せ，

$\alpha_k=(a_k,\ b_k)\cdot(\cos\theta,\ \sin\theta)=a_k\cos\theta+b_k\sin\theta$ となるので

$$D=\sum_{k=1}^{n}\{-(a_k\cos\theta+b_k\sin\theta)^2+(a_k{}^2+b_k{}^2)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2\sin^2\theta+b_k{}^2\cos^2\theta-a_kb_k\sin2\theta)$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2\right)\sin^2\theta+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2\right)\cos^2\theta-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)\sin2\theta$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)\sin2\theta\qquad\left(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2=\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2\text{ より}\right)$$

となり，$0\leqq2\theta<2\pi$ より，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき D が最小となるので，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2=\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2$ に注意するとその最小値は

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2-\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(2a_k{}^2-2a_kb_k)=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2}$$

第21講　球の取り扱い

21　空間の点 $(10,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径9の球面を S_1 とし，点 $(0,\ 10,\ 0)$ を中心とする半径8の球面を S_2 とする．S_1 と S_2 に接し，原点を通る直線の大きさ1の方向ベクトル $(a,\ b,\ c)$ $(c\geqq 0)$ をすべて求めよ．

【選択肢】

㋐　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \mp\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号同順）

㋑　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号同順）

㋒　$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号任意）

【答】　㋒

【解答】

$\vec{x}=\dfrac{1}{10}(10,\ 0,\ 0)$，$\vec{y}=\dfrac{1}{10}(0,\ 10,\ 0)$ とし，$\vec{l}=(a,\ b,\ c)$ とおく．

$\vec{x}$ と $\vec{l}$，$\vec{y}$ と $\vec{l}$ のなす角をそれぞれ α，β とすると

$$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{10^2-9^2}}{10}=\pm\frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$\cos\beta=\pm\frac{\sqrt{10^2-8^2}}{10}=\pm\frac{3}{5}$$

より

$$\vec{x}\cdot\vec{l}=|\vec{x}||\vec{l}|\cos\alpha\qquad\therefore\quad a=\pm\frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$\vec{y}\cdot\vec{l}=|\vec{y}||\vec{l}|\cos\beta\qquad\therefore\quad b=\pm\frac{3}{5}$$

ここで $|\vec{l}|=1$ より

$$a^2+b^2+c^2=1$$

$$\frac{19}{100}+\frac{9}{25}+c^2=1\qquad\therefore\quad c=\pm\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

よって，$c\geqq 0$ であることに注意すると

$$\vec{l}=\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\frac{3}{5},\ \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\ \text{（複号任意）}$$

第 22 講　三角形の五心とベクトル

22　A(3, 0, 0)，B(0, 4, 0)，C(0, 0, 4) とするとき，三角形 ABC の重心，内心，垂心，外心をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

㋐　重心 $\left(1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$，内心 $\left(\dfrac{30\sqrt{2}-24}{17}, \dfrac{50-20\sqrt{2}}{17}, \dfrac{50-20\sqrt{2}}{17}\right)$，

垂心 $\left(\dfrac{24}{17}, \dfrac{18}{17}, \dfrac{18}{17}\right)$，外心 $\left(\dfrac{27}{34}, \dfrac{25}{17}, \dfrac{25}{17}\right)$

㋑　重心 (4, 3, 4)，内心 $\left(\dfrac{24}{17}, \dfrac{20\sqrt{2}}{17}, \dfrac{20\sqrt{2}}{17}\right)$，垂心 $\left(\dfrac{18}{17}, \dfrac{18}{17}, \dfrac{24}{17}\right)$，

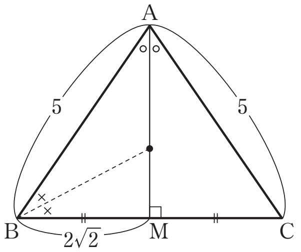
外心 $\left(\dfrac{27}{34}, \dfrac{25}{17}, \dfrac{25}{34}\right)$

㋒　重心 $\left(\dfrac{4}{3}, 1, \dfrac{4}{3}\right)$，内心 $\left(\dfrac{30\sqrt{2}}{17}, \dfrac{50}{17}, \dfrac{50}{17}\right)$，垂心 $\left(\dfrac{18}{17}, \dfrac{24}{17}, \dfrac{18}{17}\right)$，

外心 $\left(\dfrac{27}{17}, \dfrac{25}{17}, \dfrac{25}{17}\right)$

【答】 ㋐

【解答】



A(3, 0, 0)，B(0, 4, 0)，C(0, 0, 4) より重心の位置ベクトルは

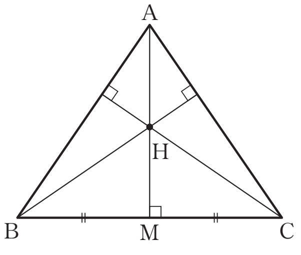
$$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\left(1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \qquad \therefore\ \textbf{重心}\ \left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)$$

また，辺 BC の中点を M とすると，$\mathrm{BC}=4\sqrt{2}$ であるから $\mathrm{BM}=2\sqrt{2}$ となる．

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=5$ より内心は AM を $\mathrm{AB}:\mathrm{BM}=5:2\sqrt{2}$ に内分する点であるから

$$\frac{2\sqrt{2}\,\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OM}}{5+2\sqrt{2}}=\frac{5-2\sqrt{2}}{17}(6\sqrt{2}, 10, 10)$$

$$\therefore\ \textbf{内心}\ \left(\frac{\mathbf{30\sqrt{2}-24}}{\mathbf{17}}, \frac{\mathbf{50-20\sqrt{2}}}{\mathbf{17}}, \frac{\mathbf{50-20\sqrt{2}}}{\mathbf{17}}\right)$$



垂心を H とすると，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ より H は線分 AM 上にあるので，実数 t を用いて $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AM}$ と表せ，

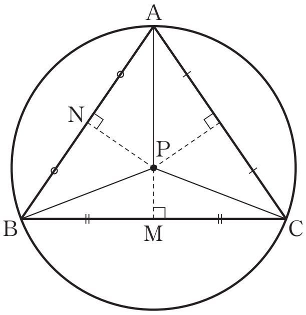
$\mathrm{BH}\perp\mathrm{AC}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=(\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=t\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{OA}|^2 \qquad (\mathrm{OA}\perp\mathrm{OB},\ \mathrm{OB}\perp\mathrm{OC},\ \mathrm{OC}\perp\mathrm{OA}\ \text{より})\\&=17t-9=0 \qquad \therefore\ t=\frac{9}{17}\end{aligned}$$

となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(3,\ 0,\ 0)+\frac{9}{17}(-3,\ 2,\ 2)=\left(\frac{24}{17},\ \frac{18}{17},\ \frac{18}{17}\right)$$

∴　**垂心** $\left(\boldsymbol{\frac{24}{17}},\ \boldsymbol{\frac{18}{17}},\ \boldsymbol{\frac{18}{17}}\right)$



外心をPとすると，Pも線分AM上にあるので，実数 u を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表せ，辺ABの中点をNとするとき，NP⊥ABより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{NP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=u\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}{2}\\&=17u-\frac{25}{2}=0\qquad\therefore\quad u=\frac{25}{34}\end{aligned}$$

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(3,\ 0,\ 0)+\frac{25}{34}(-3,\ 2,\ 2)=\left(\frac{27}{34},\ \frac{25}{17},\ \frac{25}{17}\right)$

∴　**外心** $\left(\boldsymbol{\frac{27}{34}},\ \boldsymbol{\frac{25}{17}},\ \boldsymbol{\frac{25}{17}}\right)$

第 23 講　ベクトルの利用法

23　次の各問いに答えよ.

(1)　xy 平面上で，直線 $l：ax+by+c=0$ として，l 上にない点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とする．P から l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

(2)　空間の点 (10, 9, 8) を中心とする半径 7 の球面を S_1 とし，点 (6, 5, 4) を中心とする半径 3 の球面を S_2 とする．S_1 上の点を P，S_2 上の点を Q とするとき，線分 PQ の長さが最大になるような点 P と Q の座標を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐　$\mathrm{H}\left(p+\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ q+\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

㋑　$\mathrm{H}\left(p-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ q-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

㋒　$\mathrm{H}\left(q-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ p-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)$

(2)　㋐　$\mathrm{P}\left(6-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 5-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 4-\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(10+\sqrt{3},\ 9+\sqrt{3},\ 8+\sqrt{3})$

㋑　$\mathrm{P}\left(10-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 9-\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 8-\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(6+\sqrt{3},\ 5+\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3})$

㋒　$\mathrm{P}\left(10+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 9+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 8+\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{Q}(6-\sqrt{3},\ 5-\sqrt{3},\ 4-\sqrt{3})$

【答】　(1) ㋑　(2) ㋒

【解答】

(1)　直線 l の法線ベクトルの 1 つを $\vec{u}=(a,\ b)$ とすると，$\mathrm{PH}\perp l$，$l\perp\vec{u}$ より，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k\vec{u}$ したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(p+ka,\ q+kb)$ と表せる．これを l の式に代入して

$a(p+ka)+b(q+kb)+c=0$ よって $k=-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}$ を得る.

ゆえに，$\boldsymbol{\mathrm{H}\left(p-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}a,\ q-\dfrac{ap+bq+c}{a^2+b^2}b\right)}$

(2)　A(10, 9, 8)，B(6, 5, 4) とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(4,\ 4,\ 4)$ より $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=4\sqrt{3}$ であり，

$7-3=\sqrt{16}<4\sqrt{3}=\sqrt{48}<\sqrt{100}<7+3$ より S_1 と S_2 は共有点をもつ.

よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{7}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{3}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{7}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(10+\frac{7}{\sqrt{3}},\ 9+\frac{7}{\sqrt{3}},\ 8+\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{3}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(6-\sqrt{3},\ 5-\sqrt{3},\ 4-\sqrt{3})$$

のとき PQ の長さが最大となる.

ゆえに，$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(10+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 9+\dfrac{7}{\sqrt{3}},\ 8+\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)}$，$\boldsymbol{\mathrm{Q}(6-\sqrt{3},\ 5-\sqrt{3},\ 4-\sqrt{3})}$

第24講　空間での垂線の足

24　O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(-1, $\sqrt{5}$, 1), C(0, 0, $\sqrt{6}$) として，3点O，A，Bを通る平面を α とする．α 上の点Oを中心とし半径2の円周上の点をPとして，点Cから α へ下ろした垂線の足をHとするとき，PHの長さの最小値を求めよ．

【選択肢】

㋐ 1　㋑ 2　㋒ 3

【答】 ㋐

【解答】

Hは平面 α 上の点より，実数 s と t を用いて

$$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

と表せる．ここで $CH\perp\alpha$ より $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ かつ $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ であるが

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}\\&=(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}\\&=s|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となり，

$$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0,\ 0),\ \overrightarrow{OB}=(-1,\ \sqrt{5},\ 1),\ \overrightarrow{OC}=(0,\ 0,\ \sqrt{6})$$

より

$$|\overrightarrow{OA}|=2,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$$

となるので，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=4s-2t=0$ ゆえに $t=2s$

　また，同様に

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

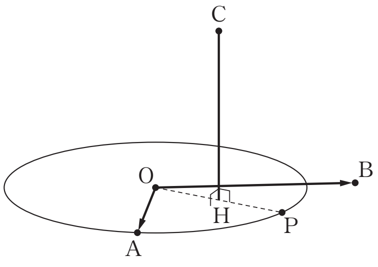
となり，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2,\ |\overrightarrow{OB}|=\sqrt{7},\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\sqrt{6}$$

となるので，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=-2s+7t-\sqrt{6}=0$

　以上より $s=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$，$t=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　よって $H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{30}}{6},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

このとき OH$=1$ で OP$=2$ より，$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OH}$ のとき PH は最小値 $2-1=\mathbf{1}$ をとる．



実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に３回しか乗ったことがない人と 300 回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう‼

堺　義明

高３　トップレベル数学ⅠＡⅡＢ（後期）

目　次

第 25 講　円と放物線の関係

第 26 講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

第 27 講　軌跡・領域の求め方

第 28 講　正領域，負領域

第 29 講　リンゴを分ける方法

第 30 講　勘違いと条件付き確率

第 31 講　四面体について

第 32 講　式の値と実数解条件

第 33 講　相加平均と相乗平均

第 34 講　対称式について

第 35 講　方程式と共役解

第 36 講　1 の n 乗根

第 37 講　３次方程式の解の公式について

第 38 講　整数問題 Part Ⅰ

第 39 講　整数問題 Part Ⅱ

第 40 講　複数の変数の取り扱い

第 41 講　なす角の攻め方

第 42 講　偶関数，奇関数，対称移動

第 43 講　必要条件からヒントを得る

第 44 講　二項係数

第 45 講　コーシー・シュワルツの不等式

第 46 講　対称性

第 47 講　x の整式を求める

第 48 講　身の回りの数学

第 25 講　円と放物線の関係

25　次の各問いに答えよ．ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で円と放物線が共有点をもち，かつその点におけるそれぞれの接線が一致することである．

(1)　放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-\beta)^2=r^2$ $(r>0)$ が異なる 2 点で接している．ただし，β は定数とし，接点以外の共有点はもたないものとする．このとき r を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2$ とある点で接し，点 $(1,\ \beta)$ を中心とする円がちょうど 3 つあるとする．このとき定数 β の条件を求めよ．

＜ Note ＞

第 25 講　円と放物線の関係

25 座標平面上で１つの円が放物線 $y=x^2$ に右側から接し，かつ x 軸に上から接している．放物線との接点 A の x 座標を $a\ (>0)$ とするとき，円の中心 C の座標を求めよ．

ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で両者が共有点をもち，かつその点における両者の接線が一致することをいう．

【選択肢】

㋐ $\mathrm{C}\left(\dfrac{a(1+\sqrt{4a^2+1})}{2},\ \dfrac{a^2\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$　　㋑ $\mathrm{C}\left(\dfrac{1+\sqrt{4a^2+1}}{2},\ \dfrac{a\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$

㋒ $\mathrm{C}\left(\dfrac{a^2(1+\sqrt{4a^2+1})}{2},\ \dfrac{a^4\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$

＜ Note ＞

第26講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

26　次の各問いに答えよ．

(1)　2つの円 $x^2+y^2=1$ と $x^2+y^2-8x-6y=0$ の異なる2つの共有点をP，Qとする．直線PQの方程式を求めよ．また，PとQと点 $(1,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+k$ $\left(k>-\frac{1}{4}\right)$ の異なる2つの共有点をP，Qとし，R$(1,\ 0)$ とする．放物線 $y=ax^2+bx+c$ が3点P，Q，Rを通るとき，実数 a，b，c の値を求めよ．

(3)　曲線 C：$y=x^3-3x$，直線 l：$y=x-1$ の異なる3つの共有点をP，Q，Rとする．$f(x)$ を x の3次の整式とし，$y=f(x)$ のグラフは3点P，Q，Rを通り，$f(x)$ の極値の1つが $-\frac{3}{4}$ となるような $f(x)$ を求めよ．

＜ Note ＞

第 26 講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

26　円 $x^2+y^2=9$ を C_1，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ を C_2 とする．次の各問いに答えよ．

(1)　C_1 と C_2 の 2 つの共有点を通る直線の方程式が $6x+2y-15=0$ となるような $(a,\ b)$ を求めよ．

(2)　(1)の 2 つの共有点と原点を通る円の方程式を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$(a,\ b)=\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$　㋑　$(a,\ b)=(3,\ 1),\ (6,\ 2)$

㋒　$(a,\ b)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (3,\ 1)$

(2)　㋐　$x^2+y^2-\frac{18}{5}x-\frac{6}{5}y=0$　㋑　$x^2+y^2-\frac{36}{5}x-\frac{12}{5}y=0$

㋒　$x^2+y^2-\frac{9}{5}x-\frac{3}{5}y=0$

＜ Note ＞

第 27 講　軌跡・領域の求め方

27　次の各問いに答えよ．

(1)　次の式で表される点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，P の描く曲線を求め，それを図示せよ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

$$\begin{cases} x\sin\theta+y\sin 2\theta=\sin\theta \\ x\cos\theta+y\cos 2\theta=-\cos\theta \end{cases}$$

(2)　実数 t が $0\leqq t\leqq 2$ の範囲で動くとき，直線 $y=3(t^2-1)x-2t^3$ の通過する領域を求め，それを図示せよ．

< Note >

第 27 講　軌跡・領域の求め方

27　実数 a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，曲線 $y=x^3-3a^2x+a^2$ の極大点と極小点の間にある部分（ただし，極大点，極小点は含まない）が通る範囲を図示せよ．

＜ Note ＞

第28講　正領域，負領域

28　A(2，-3)，B(0，-2)，C$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{7}{2}\right)$とするとき，次の各問いに答えよ.

(1)　直線 $x+ty+t^2=0$ が線分 AB (端点を含む) と共有点をもつような実数 t の条件を求めよ.

(2)　直線 $x+ty+t^2=0$ が線分 AB (端点を含まない) と共有点をもつような実数 t の条件を求めよ.

(3)　直線 $x+ty+t^2=0$ が三角形 ABC と共有点をもつような実数 t の条件を求めよ.

(4)　直線 $x+ty+t^2=0$ が三角形 ABC の内部と共有点をもつような実数 t の条件を求めよ.

< Note >

第28講　正領域，負領域

28　1でない実数 t に対して点 $\mathrm{P}(5-2t,\ t)$ と定め，点 $\mathrm{Q}(3,\ 1)$ とし，$C：x^2+y^2=R$ $(R>0)$ とする．次の各問いに答えよ．

(1)　直線PQを表す式を求めよ．

(2)　線分PQ（両端を含む）が円 C の内部に含まれているような R の値の範囲を求めよ．

(3)　線分PQ（両端を含む）が円 C の周及び内部と共有点をもたないような R の値の範囲を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐ $x+2y+5=0$　　㋑ $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$　　㋒ $2x-y+5=0$

(2)　㋐ $\begin{cases} R>10 & (1<t\leqq 3) \\ R>5t^2-20t+25 & (t<1,\ t>3) \end{cases}$　　㋑ $\begin{cases} R<10 & (1<t\leqq 3) \\ R<5t^2-20t+25 & (t<1,\ t>3) \end{cases}$

㋒ $\begin{cases} R>10 & (1\leqq t\leqq 3) \\ R>5t^2-20t+25 & (t<1,\ t>3) \end{cases}$

(3)　㋐ $\begin{cases} R>10 & (t<1) \\ R>5t^2-20t+25 & (1<t<2) \\ R>5 & (t\geqq 2) \end{cases}$　　㋑ $\begin{cases} R<10 & (t\geqq 2) \\ R<5t^2-20t+25 & (1<t<2) \\ R<5 & (t<1) \end{cases}$

㋒ $\begin{cases} R<10 & (t<1) \\ R<5t^2-20t+25 & (1<t<2) \\ R<5 & (t\geqq 2) \end{cases}$

＜ Note ＞

第29講　リンゴを分ける方法

29 次の条件を満たす整数の組の組数を求めよ．ただし，x，y，z は整数，n は自然数とする．

(1) $x+y \leqq n$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$

(2) $x+y+z=n$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$

(3) $x+y+z=n$ かつ $x \geqq 2$ かつ $y \geqq 1$ かつ $z \geqq 0$

(4) $x+y+z \leqq n$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$

(5) $x+y+2z=n$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$

＜ Note ＞

第29講　リンゴを分ける方法

29　n は正の整数であり，6の倍数であるとする。$1 \leqq t < u < v \leqq n$ かつ $t+u+v=n$ となる整数 t，u，v の組合せは何通りあるか.

【選択肢】

㋐　$\dfrac{1}{12}n^2-n+4$（通り）　㋑　$\dfrac{1}{12}n^2+\dfrac{1}{2}n-5$（通り）

㋒　$\dfrac{1}{12}n^2-\dfrac{1}{2}n+1$（通り）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

第30講　勘違いと条件付き確率

30

［A］凛太郎の住む地域では1000人に1人が病気Xにかかっているという．ある検査薬Fは，病気Xにかかっている人に使用した場合は確率αで病気Xであると判定して，病気Xにかかっていない人に使用した場合は確率βで病気Xであると判定するものとする．ここで凛太郎が検査薬Fを用いた結果病気Xだと判定されたときに本当に病気Xにかかっている確率をPとするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\alpha=\dfrac{19}{20}$，$\beta=\dfrac{1}{100}$ のときPを求めよ．

(2)　$\alpha=\dfrac{19}{20}$ のとき，βがどのような条件を満たすとき $P>\dfrac{1}{2}$ とすることができるか．

［B］凛太郎は，赤いコインか青いコインを2枚だけ持っているという．

(1)　寅次郎は凛太郎の持っている2枚のコインのうち1枚だけを見てしまい，もう1枚は見えなかった．見えたコインの色が青だったので，寅次郎は以下のように考えた．

「凛太郎の2枚のコインの組合せは『赤と赤』，『赤と青』，『青と赤』，『青と青』の4通りのはずで，今青が見えたから『赤と赤』の可能性はなく，『赤と青』，『青と赤』，『青と青』の3通りとなるから，凛太郎が2枚とも青のコインを持っている確率は $\dfrac{1}{3}$ だな．」

寅次郎の間違いを説明せよ．

(2)　任三郎は凛太郎に「青いコイン持っている？」と聞いたとき，凛太郎は「うん，持っているよ．」と答えた．このとき凛太郎が2枚とも青のコインを持っている確率を求めよ．

［C］凛太郎は，自分からは見えない場所にあるゴミ箱にゴミを投げ入れようとしている．ゴミ箱は3種類あり，大きさの違いからゴミ箱A，ゴミ箱B，ゴミ箱Cにゴミが入る確率は，順に $\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$ となっている．

3つのゴミ箱に何も入っていない状態で凛太郎がゴミを投げ入れたとき，京四郎がちょうどゴミ箱の傍を通りかかった．凛太郎が京四郎に「ゴミ箱Bかゴミ箱Cのどっちかにはゴミが入っていないはずだから，どっちのゴミ箱が空なのか教えてくれないか？」というと京四郎は「ゴミ箱Bが空だよ．」と答えた．…①

(1)　ゴミ箱Bとゴミ箱Cが同時に空のときに，京四郎が「ゴミ箱Bが空だよ．」という確率が $\dfrac{1}{2}$ であるとき，ゴミ箱Aにゴミが入っている確率を求めよ．

(2)　ゴミ箱Bとゴミ箱Cが同時に空のときに，京四郎が「ゴミ箱Bが空だよ．」という確率がαのとき，①の条件のもとでゴミ箱Aにゴミが入っている確率が $\dfrac{1}{6}$ になるという．αを求めよ．

＜ Note ＞

第30講　勘違いと条件付き確率

30　ある監獄に A, B, C という 3 人の囚人がいて, それぞれ独房に入れられている. 近々 3 人まとめて処刑される予定になっていたが, 恩赦が出て 3 人のうち 1 人だけ助かることになった. 誰が恩赦になるかは明かされておらず, それぞれの囚人が「私は助かるのか?」と聞いても看守は答えない.

そこで, 囚人 A は看守にこう頼んだ.「私以外の 2 人のうち少なくとも 1 人は死刑になるはずだ. その者の名前が知りたい. 私のことじゃないんだから教えてくれてもよいだろう?」

すると看守は「B は死刑になる」と教えてくれた. それを聞いた囚人 A は「これで助かる確率が $\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{2}$ に上がった」とひそかに喜んだ.

囚人 A の間違いを指摘せよ.

＜ Note ＞

第 31 講　四面体について

31　次の各問いに答えよ．

(1)　四面体 ABCD が AB＝3，AC＝4，AD＝5，AB⊥AC，AC⊥AD，AD⊥AB を満たしている．頂点 A から平面 BCD へ下ろした垂線の足を H とするとき，線分 AH の長さを求めよ．

(2)　四面体 ABCD が AB＝AC＝AD＝5，BC＝CD＝DB＝6 を満たしている．この四面体の体積を求めよ．

(3)　四面体 ABCD が AB＝CD＝x，AC＝BC＝AD＝BD＝2 を満たしている．この四面体の体積の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

第31講　四面体について

31　半径 r の球面上に4点A，B，C，Dがある．四面体ABCDの各辺の長さは

$$AB=\sqrt{3},\ AC=AD=BC=BD=CD=2$$

を満たしている．このとき r の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$r=\dfrac{\sqrt{11}}{3}$　㋑　$r=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$　㋒　$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

< Note >

第32講　式の値と実数解条件

32　次の各問いに答えよ.

(1)　$x \geqq 0$ のとき, $\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ の値の範囲を求めよ.

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき, $\dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta}$ の値の範囲を求めよ.

< Note >

第32講　式の値と実数解条件

32　x の関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ に関して次の各問いに答えよ.

(1)　x がすべての実数値をとるとき, $f(x)$ の値の範囲を求めよ.

(2)　x が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くとき, $f(x)$ の値の範囲を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐　$-\dfrac{1}{6}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$　　㋑　$-\dfrac{1}{4}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{3}$　　㋒　$-\dfrac{1}{3}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$

(2)　㋐　$\dfrac{1}{4}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{3}$　　㋑　$\dfrac{1}{6}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$　　㋒　$\dfrac{1}{3}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$

＜ Note ＞

第 33 講　相加平均と相乗平均

33 次の各問いに答えよ．

(1) x，y，z を正の実数とする．このとき，$\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ であることを示せ．

(2) $f(x)=3x^2-2x^3$ $\left(0<x<\dfrac{3}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

(3) $x>1$ のとき $\dfrac{x^3-3x^2+3x}{x-1}$ の最小値を求めよ．

< Note >

第33講　相加平均と相乗平均

33　相加平均と相乗平均の関係を用いて，次の各問いに答えよ．

ただし，α，β，γ が正のときには「$\alpha+\beta \geqq 2\sqrt{\alpha\beta}$（等号成立は $\alpha=\beta$ のとき）」や「$\alpha+\beta+\gamma \geqq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma$ のとき）」が成り立つことは証明なしに用いてよい．

(1)　$0<x<2$ のとき $x(2-3x)$ の最大値を求めよ．

(2)　$x>0$ のとき $\dfrac{x^3+1}{x}$ の最小値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　最大値 $\dfrac{11}{36}$ $\left(x=\dfrac{1}{6}\text{ のとき}\right)$　㋑　最大値 $\dfrac{1}{4}$ $\left(x=\dfrac{1}{2}\text{ のとき}\right)$

㋒　最大値 $\dfrac{1}{3}$ $\left(x=\dfrac{1}{3}\text{ のとき}\right)$

(2)　㋐　最小値 $\dfrac{9}{2}$ $(x=2\text{ のとき})$　㋑　最小値 $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\text{ のとき}\right)$

㋒　最小値 2 $(x=1\text{ のとき})$

＜ Note ＞

第 34 講　対称式について

34　次の各問いに答えよ．ただし，x，y，z は実数とする．

(1)　$x^2+xy+y^2=1$ を満たしているとき，$(x+1)(y+1)$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　$x^2+y^2+(z-2)^2=4$ と $x+y+2z=0$ を満たしているとき，z のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　$4x^2+8xy+9y^2=1$ を満たしているとき，$2x+3y+6xy$ のとり得る値の範囲を求めよ．

＜ Note ＞

第 34 講　対称式について

34　a，b は実数で

$$a^2+b^2=16, \quad a^3+b^3=44$$

を満たしている．このとき，$a+b$ の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　1　　㋑　2　　㋒　3

＜ Note ＞

第35講　方程式と共役解

35　次の各問いに答えよ．ただし，$\sqrt{2}$ は無理数で，i は虚数単位である．

(1)　有理数係数の方程式 $x^2+ax+b=0$ が $p+q\sqrt{2}$（p と q は有理数）を解にもつとき，$p-q\sqrt{2}$ も解であることを示せ．

(2)　実数係数の方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が $p+qi$（p と q は実数）を解にもつとき，$p-qi$ も解であることを示せ．

＜ Note ＞

第35講　方程式と共役解

35　a，b を実数とし，i を虚数単位，n を自然数とする．$z=a+bi$ に対し，$\overline{z}=a-bi$ と定めるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　α，β を複素数とする．$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$，$\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$ であることを示せ．

(2)　α が実数のとき，$\overline{\alpha}=\alpha$ であることを示せ．

(3)　実数係数の方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ が複素数 z を解にもつとき，$\overline{z}$ も解であることを示せ．

＜ Note ＞

第 36 講　1 の n 乗根

36　a，b を実数，i を虚数単位としたとき，$z=a+bi$ に対して，a を z の実部，b を z の虚部と呼ぶことにする．また，$\overline{z}$ を $a-bi$ と定める．

(1)　$x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，次の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(a)　$\omega^{2n}+\omega^n+1$

(b)　$(\omega+1)^{2n}+(\omega+1)^n+1$

(2)　$x^5=1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，以下の各問いに答えよ．

(a)　$\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$ を示せ．

(b)　ω の実部を求めよ．

＜ Note ＞

第36講　1の n 乗根

36　n を自然数とし

$$S_0=\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k},\qquad S_1=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1},\qquad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}$$

とおく．また，ω を $x^3-1=0$ の1でない解とする．

(1)　$S_0+S_1+S_2$ の値を求めよ．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\omega^k$ の値を求めよ．

(3)　$S_1=S_2$ が成り立つことを示せ．

(4)　S_0 の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　2^{3n}　　㋑　3^n　　㋒　2^n

(2)　㋐　$(-1)^{n-1}$　　㋑　$(-1)^n$　　㋒　$(-2)^n$

(4)　㋐　$S_0=\dfrac{1}{3}\{2^{3n}+2(-1)^n\}$　　㋑　$S_0=\dfrac{1}{3}\{2^n+2(-1)^n\}$　　㋒　$S_0=\dfrac{1}{5}\{3^n+(-2)^n\}$

< Note >

第37講　3次方程式の解の公式について

37　次の各問いに答えよ．

(1)　i を虚数単位として $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とするとき，

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ が成り立つことを示せ．

(2)　$y^3+z^3=2$ かつ $yz=-2$ を満たす実数 y と z を求めよ．

(3)　方程式 $x^3+6x+2=0$ の解を求めよ．

(4)　方程式 $x^3+6x^2+3x+2=0$ の解を求めよ．

＜ Note ＞

第 37 講　3 次方程式の解の公式について

37　x の 3 次方程式 $x^3+3x^2-9x+9=0$ を解け.

【選択肢】

㋐　$x=-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$, $\dfrac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

㋑　$x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$, $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

㋒　$x=-1-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$, $\dfrac{-2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

＜ Note ＞

第38講　整数問題 Part I

38　次の各問いに答えよ.

(1)　整数 a, b, c が $a^2+b^2=c^2$ を満たしているとき,

(a)　a, b の少なくとも一方は偶数であることを示せ.

(b)　b が奇数のときには a が 4 の倍数であることを示せ.

(c)　a, b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ.

(2)　a と b は互いに素な自然数とする. このとき, $ax+by=1$ となる整数 x と y が存在することを示せ.

< Note >

第38講　整数問題 Part I

38　a，b は互いに素な自然数とし，m は $1 \leqq m < ab$ を満たす整数とするとき，$ax+by=m$ となる自然数 x と y は複数存在しないことを示せ．

ただし，a，b が互いに素であるとき，$aj+bk=1$ を満たす整数 j，k が存在することを用いてよい．

< Note >

第 39 講　整数問題 Part II

39　x，y，a，b を整数とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$x=2a-b$ かつ $y=a+4b$ が成り立ち，x と y の最大公約数を G，a と b の最大公約数を g とする．このとき，$g \leqq G \leqq 9g$ であることを示せ．

(2)　$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ かつ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ を満たしているとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

第39講　整数問題 Part II

39　n が相異なる素数 p，q の積，$n=pq$ であるとき，$n-1$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ の最大公約数は1であることを示せ．

＜ Note ＞

第 40 講　複数の変数の取り扱い

40　次の各問いに答えよ．

(1)　点 $(x,\ y)$ が

$$x+4 \geqq 0,\quad x+y \leqq 6,\quad x+2y \geqq -4,\quad x-y \leqq 2$$

で表される領域内を動くとき，$f(x,\ y)=x^2-10x+4y$ の最小値を求めよ．

(2)　点 $(x,\ y,\ z)$ が

$$1 \leqq x \leqq 3,\quad 1 \leqq y \leqq 3,\quad 1 \leqq z \leqq 3,\quad x+y+z \leqq 6$$

で表される領域内を動くとき，$f(x,\ y,\ z)=xyz$ の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

第40講　複数の変数の取り扱い

40　α，β，γ は $\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする．このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　㋑ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　㋒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

< Note >

第41講　なす角の攻め方

41　xy 平面上で2点を A(0, 2), B(0, 3) とし, t を正の実数とし x 軸上の点を P(t, 0) とする. $\angle \mathrm{APB}=\theta$ とするとき, θ が最大となるような実数 t の値と, そのときの θ の余弦を求めよ.

＜ Note ＞

第41講　なす角の攻め方

41　3点を A(0, 1)，B($-2t$, $3t$)，C($-t$, $2t$) とする．$0<t<1$ のとき，∠BAC が最大となるような t の値，及びそのときの tan∠BAC の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$t=\frac{1}{3}$，$\tan\angle\mathrm{BAC}=1$　㋑　$t=\frac{1}{2}$，$\tan\angle\mathrm{BAC}=2$　㋒　$t=\frac{1}{6}$，$\tan\angle\mathrm{BAC}=3$

< Note >

第 42 講　偶関数，奇関数，対称移動

42 次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ平行移動した曲線は $y=f(x-\alpha)+\beta$ となることを示せ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ を直線 $x=p$ に関して対称移動した曲線は $y=f(2p-x)$ となることを示せ．また，曲線 $y=f(x)$ を点 $(p,\ q)$ に関して対称移動した曲線は $y=-f(2p-x)+2q$ となることを示せ．

(3) 偶関数と奇関数の積は奇関数になることを示せ．また，奇関数と奇関数の積は偶関数になることを示せ．

(4) 4 次関数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$（a，b，c，d，e は実数の定数）に関して，$y=f(x)$ が直線 $x=p$ に関して対称なグラフをもつとするとき，2 つの 2 次関数 $g(x)$ と $h(x)$ を用いて $f(x)=g(h(x))$ と表せることを示せ．

< Note >

第42講　偶関数，奇関数，対称移動

42　曲線 $y=f(x)$ を直線 $y=x+1$ に関して対称移動した曲線の方程式を求めよ．

【選択肢】

㋐　$x+1=f(y+1)$　㋑　$x+1=f(y-1)$　㋒　$x-1=f(y-1)$

＜ Note ＞

第 43 講　必要条件からヒントを得る

43 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)=ax^2+bx+c$ とする．すべての整数 n に対して $f(n)$ が整数となるような実数 a，b，c の条件を求めよ．

(2) $f(x)=x^2+px+q$ とする．すべての自然数 n に対して $f(x^n)$ が $f(x)$ で割り切れるような p と q の値を求めよ．

(3) $0<\alpha<\beta<2\pi$ とする．

$$\sin x+\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)=0$$

が任意の実数 x について成り立つとき，α と β の値を求めよ．

＜ Note ＞

第43講　必要条件からヒントを得る

43　任意の自然数 n に対して，$5\cdot 2^n+(-4)^{n-1}$ をある素数 p で割ったときの余りが常に 1 になるとする．その素数 p を求めよ．

【選択肢】

㋐　$p=2$　　㋑　$p=3$　　㋒　$p=5$

＜ Note ＞

第 44 講　二項係数

44　二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$（n は自然数，k は整数で $0 \leqq k \leqq n$）に関して，次の各問いに答えよ．

(1)　${}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_{k+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ を示せ．また，$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ を示せ．

(2)　${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．
また，${}_n\mathrm{C}_0{}^2 + {}_n\mathrm{C}_1{}^2 + {}_n\mathrm{C}_2{}^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}{}^2 + {}_n\mathrm{C}_n{}^2$ を簡単にせよ．

(3)　${}_n\mathrm{C}_1 + 2\,{}_n\mathrm{C}_2 + 3\,{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (n-1)\,{}_n\mathrm{C}_{n-1} + n\,{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

(4)　${}_n\mathrm{C}_0 + \dfrac{1}{2}\,{}_n\mathrm{C}_1 + \dfrac{1}{3}\,{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n}\,{}_n\mathrm{C}_{n-1} + \dfrac{1}{n+1}\,{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

＜ Note ＞

第44講　二項係数

44　$n \geqq 2$ のとき，$1\cdot 2\cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 2\cdot 3\cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (n-2)(n-1){}_n\mathrm{C}_{n-1} + (n-1)n\,{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

【選択肢】

㋐　$n^2 2^{n-1}$　　㋑　$n(n-1)2^{n-2}$　　㋒　$n(n+1)2^{n+2}$

＜ Note ＞

第 45 講　コーシー・シュワルツの不等式

45　次の各問いに答えよ.

(1)　$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leqq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ を示せ.

(2)　x_i, y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が実数であるとき

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)$$

を示せ.

(3)　a と b は $a<b$ を満たす実数とするとき

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$$

を示せ.

(4)　$x+y+z+w=1$ を満たす正の実数 x, y, z, w に対して $\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{y}+\dfrac{81}{z}+\dfrac{256}{w}$ の最小値を求めよ.

< Note >

第 45 講　コーシー・シュワルツの不等式

45　定積分 $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$ の値が $\dfrac{25}{6}$ より大きいことを示せ.

必要であれば，定数関数 0 でない 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に関して，$f(x)$ が $g(x)$ の実数定数倍になっていないときには

$$\left(\int_1^2 f(x)g(x)dx\right)^2<\left(\int_1^2\{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_1^2\{g(x)\}^2dx\right)$$

が成り立つことを用いてもよい.

＜ Note ＞

第 46 講　対称性

46 次の各問いに答えよ．

(1) 異なる 2 つの実数 α，β が

$$\alpha^3-3\alpha=\beta^3-3\beta$$

を満たしているとき，α の値の範囲を求めよ．

(2) x，y を実数として

$$y=4x^3-3x,\quad x=4y^3-3y$$

を満たしているとき，実数の組 $(x,\ y)$ は何組存在するか．

＜ Note ＞

第46講　対称性

46　次の連立方程式 (＊) を考える．

$$(*)\quad \begin{cases} y=2x^2-1 \\ z=2y^2-1 \\ x=2z^2-1 \end{cases}$$

(1)　$(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$ が (＊) の実数解であるとき，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$，$|c|\leqq 1$ であることを示せ．

(2)　(＊) は全部で 8 組の相異なる実数解をもつことを示せ．

＜ Note ＞

第 47 講　x の整式を求める

47　$f(x)$ を x の整式とする．次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が

$$f(x^2)=x(x-1)^2f(x)+2x^4+8x^2-4x+4$$

を満たしているとき，$f(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ が

$$f(x^2)=f(x^2-1)+(3x-6)f(x)+4x^2+6x+26$$

を満たしているとき，$f(x)$ を求めよ．

< Note >

第 47 講　x の整式を求める

47　整式 $f(x)$ について恒等式

$$f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$$

が成り立つとする．$f(x)$ を求めよ．

【選択肢】

㋐　$f(x)=x^3-3x^2+2x$　　㋑　$f(x)=x^3+3x^2-2x$　　㋒　$f(x)=x^3+3x^2+2x$

< Note >

第 48 講　身の回りの数学

48 次の各問いに答えよ.

(1) 楽器の中には弦を振動させて音を出すものがたくさんある. 現代のある規約では, 弦が 1 秒あたりに振動する回数 (つまり周波数, 単位は Hz) により音階が定められている. 表はその規約の一例である.

音階	周波数 (Hz)	440 Hz を 1 としたときの比
ラ	440.0000	1.000000
ラ♯	466.1638	1.059463
シ	493.8833	1.122462
ド	523.2511	1.189207
ド♯	554.3653	1.259921
レ	587.3295	1.334840
レ♯	622.2540	1.414214
ミ	659.2551	1.498307
ファ	698.4565	1.587401
ファ♯	739.9888	1.681793
ソ	783.9909	1.781797
ソ♯	830.6094	1.887749
ラ	880.0000	2.000000

また, 弦の材質が均質である場合にはその長さに反比例して周波数（つまり音階）が定まるようになっている.

具体的には, 弦の長さが半分になれば, 周波数は 2 倍になり, 音階は 1 オクターブ高い音になる, ということである. また, 表のように音が 1 つずつ高くなる場合には周波数が $\sqrt[12]{2}=1.05946\cdots$ 倍になることも知られている.

今, 2 点 O(0, 0) と A(1, 0) の両端に弦が張ってあり, この弦を振動させるとドの音が出るとする.

実数 x は $0 \leqq x \leqq 1$ を満たすとし, 点 P$(x, 0)$ に対し弦 AP を振動させる場合を考え, P が O から出発して A に移動する場合, n 番目のソの音は x がいくつのときになるか求めよ.

ただし, 必要であれば, $r=\sqrt[12]{2}=1.05946\cdots$ を用いて答えよ.

(2) 炭素 14 のような放射性元素は, さまざまな物質を放出しながら安定な元素に変化している. その変化の仕方は, ある決まった期間（これを半減期という）を経るとその物質の量が半分になるという. 例えば, 炭素 14 の半減期は約 5730 年であるので, 100 g の炭素 14 が密封された容器に入っている場合, 5730 年後には炭素 14 が 50 g になり, 11460 年後には 25 g になり, 残りはすべて窒素 14 に変化するということになっている.

ここで, 密封された容器の中にある放射性物質 100 g があり, その半減期が 1000 年で

あるとするとき，この物質が 20 g になるのは何年後かを求めよ．ただし，必要であるならば $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用い，小数第１位を四捨五入して答えよ．

(3) 空に輝く星までの距離を計測するため，ある星に関して太陽との角度を測ってみた．ある日，地球上のある場所から太陽と星の角度を測ると角度は θ であった．それからちょうど半年後，つまり最初の観測から地球が太陽の反対側に到達したときに同じ場所で太陽と星の角度を測ると $\pi-\theta-\alpha$ であった．地球は，太陽を中心とする半径 R の円周上を動き太陽と星は動かないものとし，最初の観測時の地球と星との距離を d とするとき，d を R，θ，α を用いて表せ．

第48講　身の回りの数学

48　平らな広場に建っている塔があり，凛太郎君はその高さを調べようとしている．凛太郎君は広場のある地点から塔の最上部を見上げるとその仰角は α であった．そして，塔と θ の角をなす方向に向かって塔を見上げながら進むと，a m 進んだところで仰角は最大となったという．凛太郎君の目の高さが b m であるとき塔の高さを求めよ．ただし α，θ は鋭角とする．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{\tan\alpha}{\sin\theta}a+b$ (m)　㋑ $\dfrac{\tan\alpha}{\cos\theta}a+b$ (m)　㋒ $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\theta}a+b$ (m)

＜ Note ＞

テキスト解答

第25講　円と放物線の関係

25　次の各問いに答えよ．ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で円と放物線が共有点をもち，かつその点におけるそれぞれの接線が一致することである．

(1)　放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-\beta)^2=r^2$ $(r>0)$ が異なる２点で接している．ただし，β は定数とし，接点以外の共有点はもたないものとする．このとき r を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2$ とある点で接し，点 $(1,\ \beta)$ を中心とする円がちょうど３つあるとする．このとき定数 β の条件を求めよ．

【答】 (1) $r=\sqrt{\beta-\dfrac{1}{4}}$ $\left(\beta>\dfrac{1}{2}\right)$　(2) $\beta>\dfrac{2+3\sqrt[3]{4}}{4}$

【解答】

(1)　$y=x^2$ を $x^2+(y-\beta)^2=r^2$ に代入した式 $y+(y-\beta)^2=r^2$ すなわち

$y^2-(2\beta-1)y+\beta^2-r^2=0$ が正の重解をもてばよいので

$$(2\beta-1)^2-4(\beta^2-r^2)=0 \text{ かつ } 2\beta-1>0$$

$$\therefore\quad r^2=\beta-\frac{1}{4} \text{ かつ } \beta>\frac{1}{2}$$

よって求める r は $\boldsymbol{r=\sqrt{\beta-\dfrac{1}{4}}}$ $\boldsymbol{\left(\beta>\dfrac{1}{2}\right)}$

(2)　$y=x^2$ より $y'=2x$ であるので，放物線 $y=x^2$ 上の点$(t,\ t^2)$ における法線は

$1(x-t)+2t(y-t^2)=0$ すなわち $x+2ty-t-2t^3=0$ となる．

この法線が点 $(1,\ \beta)$ を通るので，$1+2t\beta-t-2t^3=0$ ゆえに $2t^3-(2\beta-1)t-1=0$ となるが，この t の異なる実数解の個数が３となるような β を考えればよい．

その条件とは $f(t)=2t^3-(2\beta-1)t-1$ とおいたとき，$f(t)$ が極値をもち，$f(t)$ の極大値が正で $f(t)$ の極小値が負となることである．

$f'(t)=6t^2-(2\beta-1)$ より，$f(t)$ が極値をもつ条件は $2\beta-1>0$ すなわち $\beta>\dfrac{1}{2}$ である．

この条件のもとで $f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{2\beta-1}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2\beta-1}{6}}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗		↘		↗

となる．

$$f\left(-\sqrt{\frac{2\beta-1}{6}}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9}(2\beta-1)^{\frac{3}{2}}-1,\ f\left(\sqrt{\frac{2\beta-1}{6}}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{9}(2\beta-1)^{\frac{3}{2}}-1$$

となるが，$-\dfrac{\sqrt{6}}{9}(2\beta-1)^{\frac{3}{2}}-1<0$ であるので，求める条件は $\dfrac{\sqrt{6}}{9}(2\beta-1)^{\frac{3}{2}}-1>0$ かつ

$\beta>\dfrac{1}{2}$，つまり $\boldsymbol{\beta>\dfrac{2+3\sqrt[3]{4}}{4}}$ である．

第26講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

26 次の各問いに答えよ．

(1) 2つの円 $x^2+y^2=1$ と $x^2+y^2-8x-6y=0$ の異なる2つの共有点をP，Qとする．直線PQの方程式を求めよ．また，PとQと点 $(1,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ．

(2) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+k\left(k>-\dfrac{1}{4}\right)$ の異なる2つの共有点をP，Qとし，R$(1,\ 0)$ とする．放物線 $y=ax^2+bx+c$ が3点P，Q，Rを通るとき，実数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

(3) 曲線 $C: y=x^3-3x$，直線 $l: y=x-1$ の異なる3つの共有点をP，Q，Rとする．$f(x)$ を x の3次の整式とし，$y=f(x)$ のグラフは3点P，Q，Rを通り，$f(x)$ の極値の1つが $-\dfrac{3}{4}$ となるような $f(x)$ を求めよ．

【答】(1) 直線の方程式は $8x+6y-1=0$，円の方程式は $x^2+y^2-\dfrac{8}{13}x-\dfrac{6}{13}y-\dfrac{12}{13}=0$

(2) $a=\dfrac{k+1}{k}$，$b=-\dfrac{1}{k}$，$c=-1$　(3) $f(x)=\dfrac{64x^3-27x-165}{229}$

【解答】

(1) k を実数の定数とする．

$x^2+y^2-1=0$ と $x^2+y^2-8x-6y=0$ より

$$(x^2+y^2-1)+k(x^2+y^2-8x-6y)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の表す図形はPとQを通る．ここで $k=-1$ とすることにより，PとQを通る直線の方程式 $8x+6y-1=0$ を得る．

また①に $(x,\ y)=(1,\ 1)$ を代入することにより $(1+1-1)+k(1+1-8-6)=0$ したがって $k=\dfrac{1}{12}$ となるが，これを①に代入して整理することによりPとQと点 $(1,\ 1)$ を通る円の方程式 $\boldsymbol{x^2+y^2-\dfrac{8}{13}x-\dfrac{6}{13}y-\dfrac{12}{13}=0}$ を得る．

(2) l を実数の定数とする．

$y-x^2=0$，$y-x-k=0$ より

$$(y-x^2)+l(y-x-k)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の表す図形はPとQを通る．②に $(x,\ y)=(1,\ 0)$ を代入すると $(0-1)+l(0-1-k)=0$ したがって $(k+1)l=-1$ となるので，$k\neq-1$ より $l=-\dfrac{1}{k+1}$ を得る．

ここで $k=0$ とすると $l=-1$ であり，このとき②は $y=ax^2+bx+c$ の形にはならないので不適．よって $k\neq0$．

$l=-\dfrac{1}{k+1}$ を②に代入して整理すると $y=\dfrac{k+1}{k}x^2-\dfrac{1}{k}x-1$ となるので

$$\boldsymbol{a=\frac{k+1}{k},\ b=-\frac{1}{k},\ c=-1}$$

(3)　k を実数の定数とする．

$y-x^3+3x=0$，$y-x+1=0$ より

$$(y-x^3+3x)+k(y-x+1)=0 \quad \cdots\cdots③$$

の表す図形はＰとＱとＲを通る．③は $(1+k)y-x^3+(3-k)x+k=0$ となるが，

$k\neq-1$ のときこの式は

$$y=\frac{1}{k+1}\{x^3+(k-3)x-k\}(=f(x)) \quad \cdots\cdots④$$

と表せる．

ここで $y'=\dfrac{1}{k+1}\{3x^2+(k-3)\}$ より，④が極値をもつ条件は $k\neq-1$ かつ $k-3<0$ である．

(Ⅰ)　$k<-1$ のとき，$\dfrac{1}{k+1}<0$ より，y の増減は

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘		↗		↘

(Ⅱ)　$-1<k<3$ のとき，$\dfrac{1}{k+1}>0$ より，y の増減は

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，求める条件は $f\left(-\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}\right)=-\dfrac{3}{4}$ または $f\left(\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}\right)=-\dfrac{3}{4}$ である．

$f\left(-\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}\right)=\dfrac{1}{k+1}\left\{\dfrac{2(3-k)}{3}\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}-k\right\}=-\dfrac{3}{4}$ において $\dfrac{3-k}{3}=t$ とおいて整理すると $t(8\sqrt{t}+3)=0$ を得る．

$k\neq-1$ かつ $k-3<0$ より $t>0$，$t\neq\dfrac{4}{3}$ であるから，$t(8\sqrt{t}+3)=0$ は解なし．

また $f\left(\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}\right)=\dfrac{1}{k+1}\left\{-\dfrac{2(3-k)}{3}\sqrt{\dfrac{3-k}{3}}-k\right\}=-\dfrac{3}{4}$ より同様に

$t(-8\sqrt{t}+3)=0$ であるので，$t=\dfrac{9}{64}$ よって $k=\dfrac{165}{64}$ となる．

以上より求める整式 $f(x)$ は，$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{64x^3-27x-165}{229}}$

第 27 講　軌跡・領域の求め方

27　次の各問いに答えよ．

(1)　次の式で表される点 P$(x,\ y)$ について，P の描く曲線を求め，それを図示せよ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

$$\begin{cases} x\sin\theta+y\sin 2\theta=\sin\theta \\ x\cos\theta+y\cos 2\theta=-\cos\theta \end{cases}$$

(2)　実数 t が $0\leqq t\leqq 2$ の範囲で動くとき，直線 $y=3(t^2-1)x-2t^3$ の通過する領域を求め，それを図示せよ．

【答】 (1) $x=1-y^2$　$(-2<y<2)$

(2) $$\begin{cases} 9x-16\leqq y\leqq -3x & (x\leqq 0) \\ 9x-16\leqq y\leqq x^3-3x & \left(0<x\leqq \dfrac{4}{3}\right) \\ -3x\leqq y\leqq x^3-3x & \left(\dfrac{4}{3}<x<2\right) \\ -3x\leqq y\leqq 9x-16 & (x\geqq 2) \end{cases}$$

【解答】

(1)　$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta\neq 0$　このとき $x\sin\theta+y\sin 2\theta=\sin\theta$ より

$$x\sin\theta+y\cdot 2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta \qquad \therefore\quad x+2y\cos\theta=1$$

ここで $y\neq 0$ のとき $\cos\theta=\dfrac{1-x}{2y}$ となり，これを第 2 式を変形した式

$$x\cos\theta+y(2\cos^2\theta-1)=-\cos\theta$$

に代入すると

$$x\cdot\frac{1-x}{2y}+y\left\{2\cdot\frac{(1-x)^2}{4y^2}-1\right\}=\frac{-1-x}{2y} \qquad \therefore\quad x=1-y^2 \quad \cdots\cdots①$$

次に $0<\theta<\pi$ より $-1<\cos\theta<1$ となるので

$$-1<\frac{1-x}{2y}<1 \qquad \therefore\quad (x-2y-1)(x+2y-1)<0$$

となるが，これに①を代入し整理すると

$$y^2(y-2)(y+2)<0 \qquad \therefore\quad -2<y<0,\ 0<y<2$$

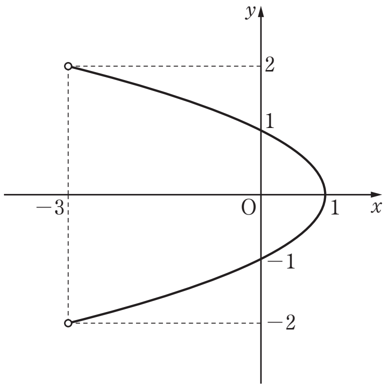
となる．

また $y=0$ のとき $x=1$ となるが，このときの第 2 式より $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となるので $(x,\ y)=(1,\ 0)$ は 2 つの式を満たす．

よって求める曲線は

$$\boldsymbol{x=1-y^2 \quad (-2<y<2)}$$

及びそれを表す図形は



(2)　$y=3(t^2-1)x-2t^3$ を t について整理すると $2t^3-3xt^2+3x+y=0$ となるので，
$f(t)=2t^3-3xt^2+3x+y$ とおくとき，$f(t)=0$ が $0\leqq t\leqq 2$ の範囲に実数解を少なくとも 1 つもつような条件を考えればよい．
$f'(t)=6t^2-6xt=6t(t-x)$ より

(Ⅰ)　$x\leqq 0$ のとき，$0\leqq t\leqq 2$ の範囲で $f(t)$ は増加であるので求める条件は
$f(0)\leqq 0$ かつ $f(2)\geqq 0$
これを整理すると $9x-16\leqq y\leqq -3x$

(Ⅱ)　$0<x\leqq \dfrac{4}{3}$ のとき，$f(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	x	$\cdots$	2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

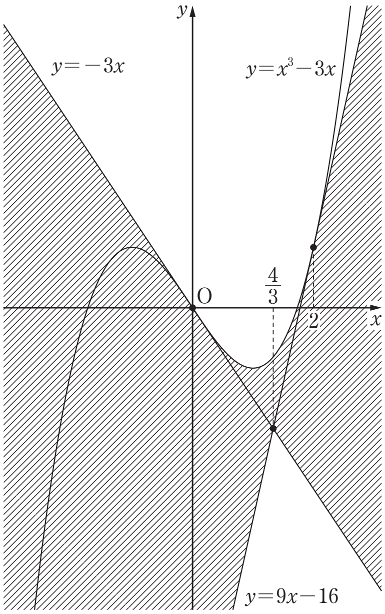
となるが，$f(0)-f(2)=12x-16\leqq 0$ より $0\leqq t\leqq 2$ の範囲で $f(x)\leqq f(t)\leqq f(2)$ となるので，求める条件は
$f(x)\leqq 0$ かつ $f(2)\geqq 0$
これを整理すると $9x-16\leqq y\leqq x^3-3x$

(Ⅲ)　$\dfrac{4}{3}<x<2$ のとき，$f(t)$ の増減は(Ⅱ)と同様となり $f(0)-f(2)=12x-16>0$ より
$0\leqq t\leqq 2$ の範囲で $f(x)\leqq f(t)\leqq f(0)$ となるので，求める条件は
$f(x)\leqq 0$ かつ $f(0)\geqq 0$
これを整理すると $-3x\leqq y\leqq x^3-3x$

(Ⅳ)　$x\geqq 2$ のとき，$0\leqq t\leqq 2$ の範囲で $f(t)$ は減少であるので求める条件は
$f(0)\geqq 0$ かつ $f(2)\leqq 0$
これを整理すると $-3x\leqq y\leqq 9x-16$

以上より，通過領域は下図境界を含む斜線部分.

$$
\begin{cases}
9x-16 \leqq y \leqq -3x & (x \leqq 0) \\
9x-16 \leqq y \leqq x^3-3x & \left(0 < x \leqq \dfrac{4}{3}\right) \\
-3x \leqq y \leqq x^3-3x & \left(\dfrac{4}{3} < x < 2\right) \\
-3x \leqq y \leqq 9x-16 & (x \geqq 2)
\end{cases}
$$



第28講　正領域，負領域

28　A$(2,\ -3)$，B$(0,\ -2)$，C$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{7}{2}\right)$とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　直線 $x+ty+t^2=0$ が線分 AB（端点を含む）と共有点をもつような実数 t の条件を求めよ．

(2)　直線 $x+ty+t^2=0$ が線分 AB（端点を含まない）と共有点をもつような実数 t の条件を求めよ．

(3)　直線 $x+ty+t^2=0$ が三角形 ABC と共有点をもつような実数 t の条件を求めよ．

(4)　直線 $x+ty+t^2=0$ が三角形 ABC の内部と共有点をもつような実数 t の条件を求めよ．

【答】　(1) $0 \leqq t \leqq 1,\ t=2$　(2) $0<t<1,\ t=2$　(3) $0 \leqq t \leqq 1,\ 2 \leqq t \leqq 3$　(4) $0<t<1,\ 2<t<3$

【解答】

$f(x,\ y)=x+ty+t^2$ とおくと，$f(\mathrm{A})=f(2,\ -3)=2+t\times(-3)+t^2$ より
$f(\mathrm{A})=(t-1)(t-2)$ である．

同様に $f(\mathrm{B})=t(t-2)$，$f(\mathrm{C})=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)(t-3)$ を得る．

(1)　$f(\mathrm{A})f(\mathrm{B}) \leqq 0$ であればよいので $t(t-1)(t-2)^2 \leqq 0$ より $\boldsymbol{0 \leqq t \leqq 1,\ t=2}$

(2)　$f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})<0$ または $f(\mathrm{A})=f(\mathrm{B})=0$ であればよいので $t(t-1)(t-2)^2<0$ または $(t-1)(t-2)=t(t-2)=0$ より $\boldsymbol{0<t<1,\ t=2}$

(3)　$f(\mathrm{A})$ と $f(\mathrm{B})$ と $f(\mathrm{C})$ がすべて正の場合と，$f(\mathrm{A})$ と $f(\mathrm{B})$ と $f(\mathrm{C})$ がすべて負の場合以外であればよい．

$$(t-1)(t-2)>0,\ t(t-2)>0,\ \left(t-\frac{1}{2}\right)(t-3)>0$$

$$\text{または}\quad (t-1)(t-2)<0,\ t(t-2)<0,\ \left(t-\frac{1}{2}\right)(t-3)<0$$

を解くと $t<0,\ 1<t<2,\ t>3$ となるので，求める t の条件は $\boldsymbol{0 \leqq t \leqq 1,\ 2 \leqq t \leqq 3}$

(4)　(3)の結果から $f(\mathrm{A})$ と $f(\mathrm{B})$ と $f(\mathrm{C})$ の中で2つが0の場合と，1つが0で残り2つが同符号の場合を除けばよいので，求める t の条件は $\boldsymbol{0<t<1,\ 2<t<3}$

第 29 講　リンゴを分ける方法

29　次の条件を満たす整数の組の組数を求めよ．ただし，x，y，z は整数，n は自然数とする．

(1)　$x+y\leqq n$ かつ $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$

(2)　$x+y+z=n$ かつ $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ かつ $z\geqq 0$

(3)　$x+y+z=n$ かつ $x\geqq 2$ かつ $y\geqq 1$ かつ $z\geqq 0$

(4)　$x+y+z\leqq n$ かつ $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ かつ $z\geqq 0$

(5)　$x+y+2z=n$ かつ $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ かつ $z\geqq 0$

【答】 (1) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$　(2) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$　(3) $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

(4) $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$　(5) $\begin{cases} \dfrac{(n+2)^2}{4} & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{(n+1)(n+3)}{4} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$

【解答】

(1)　求める整数の組の１つを　$(x,\ y)=(p,\ q)$　……①とする．

　リンゴを n 個並べ，左から p 個，その次から q 個を区切る場合を考えると，整数の組①は，このリンゴ n 個と２つの区切りの並べ方と対応している．

　よって求める整数の組数は，n 個のリンゴと２個の区切りの並べ方を考えればよいので

$${}_{n+2}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

(2)　(1)　において，左から p 個，その次から q 個を区切った後の残りを z とすればよいので，求める組数は

$${}_{n+2}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

(3)　与式を変形すると，$(x-2)+(y-1)+z=n-3$ となるので，(2)と同様に考えると，$n\geqq 3$ のときには求める組数は

$${}_{n-1}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

となり，これは $n=1$，２のときにも成り立つ．

(4)　(1)と同様に考えると求める組数は

$${}_{n+3}\mathrm{C}_3=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}}$$

(5)　k を整数とする．

(I)　n が偶数のとき，$z=k$ $\left(k=0,\ 1,\ \cdots,\ \dfrac{n}{2}\right)$ に対し $x+y=n-2k$ となる組数は

$n-2k+1$ であるので，求める組数は

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(n-2k+1)=\frac{\left(\dfrac{n}{2}+1\right)\{(n+1)+1\}}{2}=\frac{(n+2)^2}{4}$$

(Ⅱ)　n が奇数のとき，$z=k$ $\left(k=0,\ 1,\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{2}\right)$ に対し

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k+1)=\frac{\left(\dfrac{n-1}{2}+1\right)\{(n+1)+2\}}{2}=\frac{(n+1)(n+3)}{4}$$

以上より，求める組数は

$$\begin{cases} \dfrac{(n+2)^2}{4} & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{(n+1)(n+3)}{4} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

第 30 講　勘違いと条件付き確率

30

［A］ 凛太郎の住む地域では 1000 人に 1 人が病気 X にかかっているという．ある検査薬 F は，病気 X にかかっている人に使用した場合は確率 α で病気 X であると判定して，病気 X にかかっていない人に使用した場合は確率 β で病気 X であると判定するものとする．ここで凛太郎が検査薬 F を用いた結果病気 X だと判定されたときに本当に病気 X にかかっている確率を P とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha=\dfrac{19}{20}$，$\beta=\dfrac{1}{100}$ のとき P を求めよ．

(2) $\alpha=\dfrac{19}{20}$ のとき，β がどのような条件を満たすとき $P>\dfrac{1}{2}$ とすることができるか．

［B］ 凛太郎は，赤いコインか青いコインを 2 枚だけ持っているという．

(1) 寅次郎は凛太郎の持っている 2 枚のコインのうち 1 枚だけを見てしまい，もう 1 枚は見えなかった．見えたコインの色が青だったので，寅次郎は以下のように考えた．

「凛太郎の 2 枚のコインの組合せは『赤と赤』，『赤と青』，『青と赤』，『青と青』の 4 通りのはずで，今青が見えたから『赤と赤』の可能性はなく，『赤と青』，『青と赤』，『青と青』の 3 通りとなるから，凛太郎が 2 枚とも青のコインを持っている確率は $\dfrac{1}{3}$ だな．」

寅次郎の間違いを説明せよ．

(2) 任三郎は凛太郎に「青いコイン持っている？」と聞いたとき，凛太郎は「うん，持っているよ．」と答えた．このとき凛太郎が 2 枚とも青のコインを持っている確率を求めよ．

［C］ 凛太郎は，自分からは見えない場所にあるゴミ箱にゴミを投げ入れようとしている．ゴミ箱は 3 種類あり，大きさの違いからゴミ箱 A，ゴミ箱 B，ゴミ箱 C にゴミが入る確率は，順に $\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$ となっている．

3 つのゴミ箱に何も入っていない状態で凛太郎がゴミを投げ入れたとき，京四郎がちょうどゴミ箱の傍を通りかかった．凛太郎が京四郎に「ゴミ箱 B かゴミ箱 C のどっちかにはゴミが入っていないはずだから，どっちのゴミ箱が空なのか教えてくれないか？」というと京四郎は「ゴミ箱 B が空だよ．」と答えた．…①

(1) ゴミ箱 B とゴミ箱 C が同時に空のときに，京四郎が「ゴミ箱 B が空だよ．」という確率が $\dfrac{1}{2}$ であるとき，ゴミ箱 A にゴミが入っている確率を求めよ．

(2) ゴミ箱 B とゴミ箱 C が同時に空のときに，京四郎が「ゴミ箱 B が空だよ．」という確率が α のとき，①の条件のもとでゴミ箱 A にゴミが入っている確率が $\dfrac{1}{6}$ になるという．α を求めよ．

【答】 ［A］(1) $P=\dfrac{95}{1094}$　(2) $0\leqq\beta<\dfrac{19}{19980}$

［B］(1) 略　(2) $\dfrac{1}{3}$

［C］(1) $\dfrac{1}{7}$　(2) $\dfrac{3}{5}$

【解答】

［A］　凛太郎が病気 X にかかっていて病気であると判定される確率は $\dfrac{1}{1000}\times\alpha$ であり，凛太郎が病気 X にかかっていなくて病気であると判定される確率は $\dfrac{999}{1000}\times\beta$ であるので，

$$P=\frac{\dfrac{1}{1000}\times\alpha}{\dfrac{1}{1000}\times\alpha+\dfrac{999}{1000}\times\beta}=\frac{\alpha}{\alpha+999\beta}$$ となる．

(1)　$\alpha=\dfrac{19}{20}$，$\beta=\dfrac{1}{100}$ より $P=\dfrac{\dfrac{19}{20}}{\dfrac{19}{20}+999\times\dfrac{1}{100}}=\boldsymbol{\dfrac{95}{1094}}$ となる．

(2)　$\alpha=\dfrac{19}{20}$ のとき $P=\dfrac{\dfrac{19}{20}}{\dfrac{19}{20}+999\beta}=\dfrac{19}{19+19980\beta}$ より

$$P>\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\frac{19}{19+19980\beta}>\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \boldsymbol{0\leqq\beta<\frac{19}{19980}}$$

［B］(1)　『赤と赤』，『赤と青』，『青と赤』，『青と青』を持っている確率はいずれも $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ と考えられる．

『赤と赤』の場合，青の見える確率は $\dfrac{1}{4}\times0=0$，

『赤と青』の場合，赤と青を選ぶ確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ と考えられるので，『赤と青』の場合で青の見える確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$，『青と赤』の場合も同様に，『青と赤』の場合で青の見える確率は $\dfrac{1}{8}$，

『青と青』の場合はどちらを選んでも青になるので，『青と青』の場合で青の見える確率は $\dfrac{1}{4}$ となる．

つまり，寅次郎の間違いは，『赤と青』と『青と赤』と『青と青』の場合がどれも同様に確からしいとしたことである．

(2)　青を持っているのは『赤と青』，『青と赤』，『青と青』の場合であり，(1)よりどの確率も $\dfrac{1}{4}$ である．

よって求める確率は

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

[C](1)　ゴミ箱Aにゴミが入っている場合，京四郎は確率 $\frac{1}{2}$ で「Bが空」と答えるので，そのときの確率は $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

ゴミ箱Bにゴミが入っている場合，京四郎は「Bが空」と答えられないので，その確率は $\frac{1}{3}\times 0=0$

ゴミ箱Cにゴミが入っている場合，京四郎は必ず「Bが空」と答えるので，その確率は $\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

以上より，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+0+\frac{1}{2}}=\mathbf{\frac{1}{7}}$$

(2)　ゴミ箱Aにゴミが入っていて京四郎が「Bが空」という確率は $\frac{1}{6}\alpha$,

ゴミ箱Bにゴミが入っていて京四郎が「Bが空」という確率は0,

ゴミ箱Cにゴミが入っていて京四郎が「Bが空」という確率は $\frac{1}{2}$ であり，

ゴミ箱Aにゴミが入っている確率が $\frac{1}{6}$ となるので

$$\frac{\frac{1}{6}\alpha}{\frac{1}{6}\alpha+0+\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\qquad\therefore\quad \alpha=\mathbf{\frac{3}{5}}$$

第 31 講　四面体について

31　次の各問いに答えよ．

(1)　四面体 ABCD が AB＝3，AC＝4，AD＝5，AB⊥AC，AC⊥AD，AD⊥AB を満たしている．頂点 A から平面 BCD へ下ろした垂線の足を H とするとき，線分 AH の長さを求めよ．

(2)　四面体 ABCD が AB＝AC＝AD＝5，BC＝CD＝DB＝6 を満たしている．この四面体の体積を求めよ．

(3)　四面体 ABCD が AB＝CD＝x，AC＝BC＝AD＝BD＝2 を満たしている．この四面体の体積の最大値を求めよ．

【答】 (1) $\dfrac{60}{\sqrt{769}}$　(2) $3\sqrt{39}$　(3) $\dfrac{16}{27}\sqrt{3}$ ($x=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ のとき)

【解答】

(1)　この四面体の体積を計算するとき，底面を三角形 BCD と考えると高さは AH となる．

ここで AB＝3，AC＝4，AD＝5 より BC＝5，CD＝$\sqrt{41}$，DB＝$\sqrt{34}$ となるので，余弦定理を用いると

$$\cos\angle \mathrm{CBD}=\frac{5^2+(\sqrt{34})^2-(\sqrt{41})^2}{2\cdot 5\cdot\sqrt{34}}=\frac{9}{5\sqrt{34}}$$

となり，$\sin\angle \mathrm{CBD}=\dfrac{\sqrt{769}}{5\sqrt{34}}$ を得る．よって三角形 BCD の面積は

$$\frac{1}{2}\times \mathrm{BD}\times \mathrm{BC}\times\sin\angle \mathrm{CBD}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{769}}{5\sqrt{34}}=\frac{\sqrt{769}}{2}$$

となる．

また，この四面体の体積は $\dfrac{1}{6}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{AC}\times \mathrm{AD}=\dfrac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot 5=10$ であるから

$$\frac{\sqrt{769}}{2}\times \mathrm{AH}\times\frac{1}{3}=10\qquad\therefore\quad \mathrm{AH}=\boldsymbol{\frac{60}{\sqrt{769}}}$$

(2)　点 A から平面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると，AB＝AC＝AD，BC＝CD＝DB より，H は三角形 BCD の重心となる．よって CD の中点を M とするとき，BH：HM＝2：1 である．

また BC＝CD＝DB＝6 より BM＝$3\sqrt{3}$ となるので，BH＝$2\sqrt{3}$ となる．
よって AH＝$\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$ となる．

三角形 BCD の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2=9\sqrt{3}$ より求める体積は

$$9\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{3\sqrt{39}}$$

(3)　CD の中点を M，AB の中点を N とする．このとき三角形 ACD は AC＝AD の二等辺三角形であるので，AM⊥CD となる．同様に BM⊥CD となるので，CD は ABM を含む平面に垂直である．

このとき三角形 ABM は $AM=BM=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$ の二等辺三角形となるので，AB を底辺としたときの高さは MN で，$MN=\sqrt{AM^2-AN^2}=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{2}}$ となる．
ゆえに三角形 ABM の面積は

$$\frac{1}{2}\times AB\times MN=\frac{x}{2}\sqrt{4-\frac{x^2}{2}}$$

となるので，四面体の体積は

$$\frac{x}{2}\sqrt{4-\frac{x^2}{2}}\times CD\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}x^2\sqrt{8-x^2}\quad\cdots\cdots①$$

となる．

ここで，ABC が三角形である条件と $MN>0$ より得られる条件 $0<x<2\sqrt{2}$ の範囲で①が最大となるものを考えればよいが，$x^2=t$ とおくと $0<t<8$ であり，

①$=\dfrac{\sqrt{2}}{12}t\sqrt{8-t}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{8t^2-t^3}$ となる．

$8t^2-t^3=f(t)$ とおくと $f'(t)=t(16-3t)$ より $f(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	$\frac{16}{3}$	$\cdots$	8
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

となるので，求める体積の最大値は

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\times\frac{16}{3}\sqrt{8-\frac{16}{3}}=\mathbf{\frac{16}{27}\sqrt{3}}$$

このとき $x=\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ である．

第 32 講　式の値と実数解条件

32　次の各問いに答えよ．

(1)　$x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ の値の範囲を求めよ．

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta}$ の値の範囲を求めよ．

【答】 (1) $-1 \leqq \dfrac{x-1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$　(2) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \leqq \dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta} \leqq 1$

【解答】

(1)　$\dfrac{x-1}{x^2+x+1}=k$ とおき，この x の方程式が $x \geqq 0$ に実数解をもつ条件を考える．

$x-1=k(x^2+x+1)$ より　$kx^2+(k-1)x+k+1=0$　……①　となる．

(Ⅰ)　$k=0$ のとき，①は $x=1$ となり，$x \geqq 0$ に実数解をもつ．

(Ⅱ)　$k \neq 0$ のとき，$K=\dfrac{1}{k}$ とおくことで①は　$x^2+(1-K)x+1+K=0$　……②　と変形できる．

ここで $f(x)=x^2+(1-K)x+1+K$ とおくと，$f(x)=\left(x-\dfrac{K-1}{2}\right)^2-\dfrac{K^2-6K-3}{4}$

となるので，②が $x \geqq 0$ に実数解をもつ条件は

「$\dfrac{K-1}{2} \leqq 0$ かつ $f(0) \leqq 0$」　または　「$\dfrac{K-1}{2} > 0$ かつ $-\dfrac{K^2-6K-3}{4} \leqq 0$」

であるから，これらより $K \leqq -1$，$K \geqq 3+2\sqrt{3}$ を得る．

よって $-1 \leqq k < 0$，$0 < k \leqq \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$ となる．

(Ⅰ)，(Ⅱ)より求める範囲は $\boldsymbol{-1 \leqq \dfrac{x-1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}$

(2)　$\dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta}=k$　……③　とおき，この θ の方程式が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に実数解をもつ条件を考える．

③は

$$\sin\theta-k\cos\theta=2-3k$$

と変形できるが，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるので，$k>0$ となるから，$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ かつ $\tan\alpha=-k$ を満たす実数 α を用いて

$$\sin\theta-k\cos\theta=\sqrt{1+k^2}\sin(\theta+\alpha)$$

と変形できる．ここで，$\alpha \leqq \theta+\alpha \leqq \pi+\alpha$ より $\sqrt{1+k^2}\sin(\theta+\alpha)$ は $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{1+k^2}$，$\theta+\alpha=\alpha$ すなわち $\theta=0$ のとき最小値 $-k$ をとるので，③が実数解をもつ条件は

$$-k \leqq 2-3k \leqq \sqrt{1+k^2}$$

である.

$-k \leqq 2-3k$ より $k \leqq 1$

$2-3k \leqq \sqrt{1+k^2}$ より $2-3k<0$ または $2-3k \geqq 0$, $(2-3k)^2 \leqq 1+k^2$ であるので

$k \geqq \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ を得る.

以上より求める範囲は $\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \leqq \dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta} \leqq 1}$

第33講　相加平均と相乗平均

33　次の各問いに答えよ．

(1)　x，y，z を正の実数とする．このとき，$\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ であることを示せ．

(2)　$f(x)=3x^2-2x^3$ $\left(0<x<\dfrac{3}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

(3)　$x>1$ のとき $\dfrac{x^3-3x^2+3x}{x-1}$ の最小値を求めよ．

【答】　(1) 略　(2) 最大値 1（$x=1$ のとき）　(3) 最小値 $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ $\left(x=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right.$ のとき$\left.\right)$

【解答】

(1)

$$\frac{x+y+z}{3}-\sqrt[3]{xyz}=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{yz}-\sqrt[3]{zx})$$

$$=\frac{1}{6}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})\{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2+(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})^2+(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})^2\}$$

ここで，$\sqrt[3]{x}>0$，$\sqrt[3]{y}>0$，$\sqrt[3]{z}>0$ より $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}>0$ であり，
$(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2+(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})^2+(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})^2 \geqq 0$

等号成立は $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x}=0$ つまり $x=y=z$ のときであるので，
$\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ が示された．

(2)　$f(x)=x^2(3-2x)=x\times x\times(3-2x)$ である．

ここで $0<x<\dfrac{3}{2}$ より $x>0$，$3-2x>0$ であるので，(1)を用いると

$$\frac{x+x+(3-2x)}{3} \geqq \sqrt[3]{x\times x\times(3-2x)} \qquad \therefore\ 1 \geqq \sqrt[3]{x^2(3-2x)} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．等号成立は $x=3-2x$ つまり $x=1$ のときである．

①を3乗することで $f(x)\leqq 1$ を得るので，求める最大値は **1**（$x=1$ のとき）

(3)　与式より

$$\frac{x^3-3x^2+3x}{x-1}=(x-1)^2+\frac{1}{x-1}=(x-1)^2+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)}$$

である．ここで，$x>1$ より，$(x-1)^2>0$，$\dfrac{1}{2(x-1)}>0$ であるので，(1)を用いると

$$\frac{(x-1)^2+\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x-1)}}{3} \geqq \sqrt[3]{(x-1)^2\times\frac{1}{2(x-1)}\times\frac{1}{2(x-1)}}$$

$$\therefore\ (x-1)^2+\frac{1}{x-1} \geqq 3\times\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

が成り立つ．等号成立は $(x-1)^2=\dfrac{1}{2(x-1)}$ つまり $x=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のときである．

$3\times\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ より，求める最小値は $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}}$ $\left(x=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right.$ のとき$\left.\right)$

第 34 講　対称式について

34　次の各問いに答えよ．ただし，x，y，z は実数とする．

(1)　$x^2+xy+y^2=1$ を満たしているとき，$(x+1)(y+1)$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　$x^2+y^2+(z-2)^2=4$ と $x+y+2z=0$ を満たしているとき，z のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　$4x^2+8xy+9y^2=1$ を満たしているとき，$2x+3y+6xy$ のとり得る値の範囲を求めよ．

【答】　(1) $-\dfrac{1}{4}\leqq(x+1)(y+1)\leqq\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}$　(2) $0\leqq z\leqq\dfrac{4}{3}$

(3) $-\dfrac{5}{3}\leqq 2x+3y+6xy\leqq\dfrac{3+2\sqrt{30}}{10}$

【解答】

(1)　$x+y=s$，$xy=t$ とおくと，x と y は $\alpha^2-s\alpha+t=0$ の 2 つの実数解より $(-s)^2-4t\geqq 0$

$$\therefore\quad s^2-4t\geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

ここで $x^2+xy+y^2=1$ を変形すると $(x+y)^2-xy=1$ より $s^2-t=1$

$$\therefore\quad t=s^2-1$$

となるが，これを①に代入すると $s^2-4(s^2-1)\geqq 0$ よって

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\leqq s\leqq\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots②$$

を得る．

このとき

$$\begin{aligned}(x+1)(y+1)&=xy+(x+y)+1\\&=t+s+1=(s^2-1)+s+1\\&=s^2+s=\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

であることと，②より $-\dfrac{1}{4}\leqq s^2+s\leqq\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

ゆえに

$$\boldsymbol{-\frac{1}{4}\leqq(x+1)(y+1)\leqq\frac{4+2\sqrt{3}}{3}}$$

(2)　$x+y=s$，$xy=t$ とおくと，x と y は $\alpha^2-s\alpha+t=0$ の 2 つの実数解より $(-s)^2-4t\geqq 0$

$$\therefore\quad s^2-4t\geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

ここで $x+y+2z=0$ より $x+y=-2z$

$$\therefore\quad s=-2z \quad \cdots\cdots②$$

$x^2+y^2+(z-2)^2=4$ を変形すると $(x+y)^2-2xy=4z-z^2$ より $s^2-2t=4z-z^2$ となるが，これと②より $t=\dfrac{5z^2-4z}{2}$ を得る．

これと②を①に代入すると $(-2z)^2-4\times\dfrac{5z^2-4z}{2}\geqq 0$ すなわち $2z(4-3z)\geqq 0$

よって

$$\mathbf{0 \leqq z \leqq \frac{4}{3}}$$

(3)　$2x=X$, $3y=Y$ とおくことにより，$4x^2+8xy+9y^2=1$ は $X^2+\frac{4}{3}XY+Y^2=1$,

$2x+3y+6xy$ は $X+Y+XY$ と変形できる．

　ここで $X+Y=s$, $XY=t$ とおくと，X と Y は $\alpha^2-s\alpha+t=0$ の２つの実数解より

$(-s)^2-4t \geqq 0$

$$\therefore \quad s^2-4t \geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

　このとき，$X^2+\frac{4}{3}XY+Y^2=1$ は $(X+Y)^2-\frac{2}{3}XY=1$ と変形できるので $s^2-\frac{2}{3}t=1$

すなわち $t=\frac{3}{2}(s^2-1)$ となる．これを①に代入すると $s^2-4\times\frac{3}{2}(s^2-1)\geqq 0$ よって

$$-\sqrt{\frac{6}{5}} \leqq s \leqq \sqrt{\frac{6}{5}} \quad \cdots\cdots ②$$

となる．

　ここで，$X+Y+XY=s+t=s+\frac{3}{2}(s^2-1)=\frac{3}{2}\left(s+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{5}{3}$ であることと，②より

$-\frac{5}{3} \leqq X+Y+XY \leqq \frac{3+2\sqrt{30}}{10}$

　ゆえに

$$\mathbf{-\frac{5}{3} \leqq 2x+3y+6xy \leqq \frac{3+2\sqrt{30}}{10}}$$

第 35 講　方程式と共役解

35 次の各問いに答えよ．ただし，$\sqrt{2}$ は無理数で，i は虚数単位である．

(1) 有理数係数の方程式 $x^2+ax+b=0$ が $p+q\sqrt{2}$（p と q は有理数）を解にもつとき，$p-q\sqrt{2}$ も解であることを示せ．

(2) 実数係数の方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が $p+qi$（p と q は実数）を解にもつとき，$p-qi$ も解であることを示せ．

【答】 略

【解答】

(1) $p+q\sqrt{2}$ が解であるので，$(p+q\sqrt{2})^2+a(p+q\sqrt{2})+b=0$

すなわち

$$(p^2+2q2+ap+b)+(2pq+aq)\sqrt{2}=0 \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

ここで，a，b，p，q は有理数であるので，p^2+2q^2+ap+b と $2pq+aq$ は有理数となるが，$2pq+aq\neq 0$ を仮定すると①は $\sqrt{2}=-\dfrac{p^2+2q^2+ap+b}{2pq+aq}$ と変形できる．

このとき右辺の分母と分子は有理数であるので，右辺は有理数，左辺の $\sqrt{2}$ は無理数であるので，矛盾となる．

よって $2pq+aq=0$ このとき①より $p^2+2q^2+ap+b=0$

ここで

$$(p-q\sqrt{2})2+a(p-q\sqrt{2})+b=(p^2+2q^2+ap+b)-(2pq+aq)\sqrt{2}=0$$

となるので，$p-q\sqrt{2}$ も解となる．

(2) $p+qi$ が解であるので，$(p+qi)^3+a(p+qi)^2+b(p+qi)+c=0$

すなわち

$$(p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c)+(3p^2q-q^3+2apq+bq)i=0 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．

ここで，a，b，c，p，q は実数より $p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c$ と $3p^2q-q^3+2apq+bq$ は実数となるが，②より得られる
$p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c=-(3p^2q-q^3+2apq+bq)i$ を 2 乗すると
$(p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c)^2=-(3p^2q-q^3+2apq+bq)^2$ となり，
$(p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c)^2\geqq 0$，$-(3p^2q-q^3+2apq+bq)^2\leqq 0$ より
$p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c=3p^2q-q^3+2apq+bq=0$ を得る．

このとき

$$\begin{aligned}&(p-qi)^3+a(p-qi)^2+b(p-qi)+c\\&=(p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c)-(3p^2q-q^3+2apq+bq)i=0\end{aligned}$$

より $p-qi$ も解となる．

第 36 講　1 の n 乗根

36　a，b を実数，i を虚数単位としたとき，$z=a+bi$ に対して，a を z の実部，b を z の虚部と呼ぶことにする．また，$\bar{z}$ を $a-bi$ と定める．

(1)　$x^3=1$ の虚数解の１つを ω とするとき，次の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(a)　$\omega^{2n}+\omega^n+1$

(b)　$(\omega+1)^{2n}+(\omega+1)^n+1$

(2)　$x^5=1$ の虚数解の１つを ω とするとき，以下の各問いに答えよ．

(a)　$\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$ を示せ．

(b)　ω の実部を求めよ．

【答】 (1) k を整数として (a) $\begin{cases} 3 & (n=3k) \\ 0 & (n\neq 3k) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3 & (n=6k) \\ 2\omega+2 & (n=6k+1) \\ 0 & (n=6k+2,\ 6k+4) \\ 1 & (n=6k+3) \\ -2\omega & (n=6k+5) \end{cases}$

(2) (a) 略　(b) $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

【解答】

(1)　$x^3=1$ より $x^3-1=0$ ゆえに $(x-1)(x^2+x+1)=0$ となるので，ω は $x^2+x+1=0$ の虚数解の１つであるから　$\omega^2+\omega+1=0$　……①　となる．

また，ω は $x^3=1$ の解でもあるので　$\omega^3=1$　……②　となる．

以下 k を整数として，①と②を用いる．

(a)　$n=3k$ のとき，$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k}+\omega^{3k}+1=(\omega^3)^{2k}+(\omega^3)^k+1=3$

$n=3k+1$ のとき，

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}+1=(\omega^3)^{2k}\omega^2+(\omega^3)^k\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

$n=3k+2$ のとき，

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}+1=(\omega^3)^{2k+1}\omega+(\omega^3)^k\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

以上より

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\begin{cases} \mathbf{3} & (\boldsymbol{n=3k}) \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{n\neq 3k}) \end{cases} \quad (\boldsymbol{k}\text{ は整数})$$

(b)　$(\omega+1)^{2n}=(-\omega^2)^{2n}=\omega^{4n}=(\omega^3)^n\omega^n=\omega^n$，$(\omega+1)^n=(-\omega^2)^n=(-1)^n\omega^{2n}$ より

$(\omega+1)^{2n}+(\omega+1)^n+1=\omega^n+(-1)^n\omega^{2n}+1=a_n$ とおくと，

$a_{n+6}-a_n=\{\omega^{n+6}+(-1)^{n+6}\omega^{2(n+6)}+1\}-\{\omega^n+(-1)^n\omega^{2n}+1\}=0$ より $a_{n+6}=a_n$

これと $a_1=\omega-\omega^2+1=2\omega+2$，$a_2=\omega^2+\omega^4+1=\omega^2+\omega+1=0$，

$a_3=\omega^3-\omega^6+1=1-1+1=1$，$a_4=\omega^4+\omega^8+1=\omega+\omega^2+1=0$，

$a_5=\omega^5-\omega^{10}+1=\omega^2-\omega+1=-2\omega$，$a_6=\omega^6+\omega^{12}+1=1+1+1=3$ より

$$(\omega+1)^{2n}+(\omega+1)^{n}+1=\begin{cases} 3 & (n=6k) \\ 2\omega+2 & (n=6k+1) \\ 0 & (n=6k+2,\ 6k+4) \quad (k\text{ は整数}) \\ 1 & (n=6k+3) \\ -2\omega & (n=6k+5) \end{cases}$$

(2)　(a)　$x^5=1$ より $x^5-1=0$ ゆえに $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ となるので，ω は $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の虚数解の１つであるから $\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$ である．

(b)　a，b を実数として，$z=a+bi$ に対して $\overline{z}=a-bi$ より，$z+\overline{z}=2a$ となるので，複素数 z の実部は $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ となる．よって ω の実部は $\dfrac{\omega+\overline{\omega}}{2}$ である．

$x^4+x^3+x^2+x+1=0$ は $\left(x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)=0$ と変形できるので，ω は $x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1=0$ もしくは $x^2+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1=0$ の虚数解の１つであるが，どちらも実数係数の方程式であるので，これらの方程式が虚数解 ω をもつときには $\overline{\omega}$ も解となる．

解と係数の関係より $\omega+\overline{\omega}=-\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ となるので，$\dfrac{\omega+\overline{\omega}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}}$　これが求める ω の実部となる．

第 37 講　3 次方程式の解の公式について

37 次の各問いに答えよ.

(1) i を虚数単位として $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とするとき,

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ が成り立つことを示せ.

(2) $y^3+z^3=2$ かつ $yz=-2$ を満たす実数 y と z を求めよ.

(3) 方程式 $x^3+6x+2=0$ の解を求めよ.

(4) 方程式 $x^3+6x^2+3x+2=0$ の解を求めよ.

【答】 (1) 略　(2) $(y,\ z)=(-\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}),\ (\sqrt[3]{4},\ -\sqrt[3]{2})$

(3) $x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \dfrac{-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

(4) $x=-2-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9},\ \dfrac{-4+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}\pm\dfrac{(-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})\sqrt{3}}{2}i$

【解答】

(1) $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ より $\omega^2+\omega=-1$ が成り立ち，また

$\omega^3=\omega\times\omega^2=1$ が成り立つ.

ここで

$$\begin{aligned}&(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)\\&=x^2+\omega^2 xy+\omega zx+\omega xy+\omega^3 y^2+\omega^2 yz+\omega^2 zx+\omega^4 yz+\omega^3 z^2\\&=x^2+\omega^3 y^2+\omega^3 z^2+(\omega^2+\omega)xy+(\omega^2+\omega^4)yz+(\omega+\omega^2)zx\\&=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)\\&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\&=x^3+y^3+z^3-3xyz\end{aligned}$$

(2) $yz=-2$ より $y^3z^3=-8$ これと $y^3+z^3=2$ より y^3 と z^3 は $X^2-2X-8=0$ すなわち $(X-4)(X+2)=0$ の 2 つの解となるので，$(y^3,\ z^3)=(-2,\ 4),\ (4,\ -2)$

y，z は実数であるので

$$\boldsymbol{(y,\ z)=(-\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}),\ (\sqrt[3]{4},\ -\sqrt[3]{2})}$$

(3) (1)の結果に $(y,\ z)=(-\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4})$ を代入すると

$$x^3+6x+2=(x-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(x-\sqrt[3]{2}\,\omega+\sqrt[3]{4}\,\omega^2)(x-\sqrt[3]{2}\,\omega^2+\sqrt[3]{4}\,\omega)$$

となるので，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ と $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ より，$x^3+6x+2=0$ の解は

$$\boldsymbol{x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \frac{-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i}$$

(4) $x^3+6x^2+3x+2=0$ において $x=t-2$ とおくと $t^3-9t+12=0$ となる.

(1)の結果に $x=t$，$y=\sqrt[3]{3}$，$z=\sqrt[3]{9}$ とおくことで $x^3+y^3+z^3-3xyz=t^3-9t+12$ と

なるので，

$t^3-9t+12=0$ の解は

$$t=-y-z,\ \ -\omega y-\omega^2 z,\ \ -\omega^2 y-\omega z$$

となる．この結果と $x=t-2$ より

$$\boldsymbol{x=-2-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9},\ \ \frac{-4+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}\pm\frac{(-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})\sqrt{3}}{2}i}$$

を得る．

第38講　整数問題 Part I

38 次の各問いに答えよ．

(1) 整数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たしているとき，

(a) a，b の少なくとも一方は偶数であることを示せ．

(b) b が奇数のときには a が 4 の倍数であることを示せ．

(c) a，b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ．

(2) a と b は互いに素な自然数とする．このとき，$ax+by=1$ となる整数 x と y が存在することを示せ．

【答】 略

【解答】

(1) k，l，m を整数とする．

(a) $a=2k+1$，$b=2l+1$ と仮定すると

$$a^2+b^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2=4(k^2+k+l^2+l)+2$$

となり，a^2+b^2 を 4 で割ったときの余りは 2 となる．

ここで $c=2m$ のとき $c^2=4m^2$，$c=2m+1$ のとき $c^2=4(m^2+m)+1$ となり，c^2 を 4 で割ったときの余りは 0 または 1 であるので，$a^2+b^2=c^2$ に矛盾する．

よって a と b の少なくとも一方は偶数である．

(b) (a)の結果と b が奇数より，a は偶数となる．よって，$a=2k$，$b=2l+1$ と表すことができ，このとき $a^2+b^2=(2k)^2+(2l+1)^2=4(k^2+l^2+l)+1$　ゆえに c^2 は奇数．よって c は奇数となるので $c=2m+1$ と表せる．

このとき $a^2+b^2=c^2$ より $4(k^2+l^2+l)+1=4m^2+4m+1$ となるので

$$k^2=m(m+1)-l(l+1)$$

を得る．

ここで m と $m+1$ は連続する 2 つの整数より，m と $m+1$ の少なくとも一方は偶数．よって $m(m+1)$ は偶数となり，同様に $l(l+1)$ も偶数．

したがって k^2 は偶数であるから，k は偶数．

ゆえに $a=2k$ は 4 の倍数となる．

(c) $(3k)^2=3\cdot3k^2$，$(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$，$(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$　より整数を 2 乗した数を 3 で割ると余りは 0 または 1 となり，余りが 0 となるのはその整数が 3 の倍数のときだけで，余りが 1 となるのはその整数が 3 の倍数でないときである．

a と b の両方が 3 で割り切れないとすると，上記より，a^2，b^2 のどちらも 3 で割ると余りが 1 となるので，a^2+b^2 を 3 で割ると余りは 2 となるが，c^2 を 3 で割ったときの余りは 0 または 1 であることより，これは $a^2+b^2=c^2$ に矛盾する．

よって a と b の少なくとも一方は 3 の倍数となる．

(2) $b\cdot1$，$b\cdot2$，$b\cdot3$，……，$b\cdot a$ について，これら a 個の数を a で割ったときの余りはすべて異なることを示すため，これらの中で a で割ったときの余りが等しいものが存在すると仮定する．つまり，整数 j，k に対して

$$1 \leqq j < k \leqq a \text{ かつ } bj = aQ_1 + r \text{ かつ } bk = aQ_2 + r$$

を満たす整数 Q_1，Q_2，r（0 以上 a 未満）があるとする．

このとき $bj = aQ_1 + r$ と $bk = aQ_2 + r$ の辺々の差をとると

$$b(j-k) = a(Q_1 - Q_2)$$

となるが，a と b は互いに素よりこの式は ab の倍数となる．つまり整数 l を用いて $b(j-k) = abl$ と表せる．ゆえに $j-k = al$ となる．

ここで $1 \leqq j < k \leqq a$ より $-a < j-k < 0$ となるので，$j-k = al$ となる整数 l が存在しない．

よって $b \times 1$，$b \times 2$，……，$b \times a$ を a で割った余りはすべて異なるので，$bj = aQ + 1$ となる整数 j，Q が存在することになる．

$bj = aQ + 1$ より $a \times (-Q) + bj = 1$ であるから，$ax + by = 1$ となる整数 x と y が存在することが示された．

第 39 講　整数問題 Part II

39　x，y，a，b を整数とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$x=2a-b$ かつ $y=a+4b$ が成り立ち，x と y の最大公約数を G，a と b の最大公約数を g とする．このとき，$g\leqq G\leqq 9g$ であることを示せ．

(2)　$x\geqq 1$ かつ $y\geqq 1$ かつ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ を満たしているとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の最大値を求めよ．

【答】 (1)　略　(2)　$\dfrac{37}{186}$

【解答】

(1)　a と b の最大公約数が g より，互いに素である整数 a'，b' を用いて $a=a'g$，$b=b'g$ と表せるので，$x=2a-b$ かつ $y=a+4b$ は $x=(2a'-b')g$，$y=(a'+4b')g$ と表せる．これは g が x と y の公約数であることを示している．

　x と y の最大公約数が G であるので，$g\leqq G$ となる．

x と y の最大公約数が G より，互いに素である整数 x'，y' を用いて $x=x'G$，$y=y'G$ と表せる．

　このとき $x=2a-b$ かつ $y=a+4b$ は $x'G=2a-b$，$y'G=a+4b$ と表せるが，これらより $9a=(4x'+y')G$，$9b=(-x'+2y')G$ を得る．これは G が $9a$ と $9b$ の公約数であることを示している．

　ここで $9a$ と $9b$ の最大公約数は $9g$ となるので，$G\leqq 9g$ となる．

以上より $g\leqq G\leqq 9g$ が示された．

(2)　まずは $x\leqq y$ としたものを考える．

$1\leqq x\leqq 5$ とすると $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{5}$ となり不適．よって $x\geqq 6$

$x=6$ のとき，$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ より $y>30$ であるので，$y=31$ のとき $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{y}$ は最大値 $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{31}=\dfrac{37}{186}$ をとる．

$x=7$ のとき，$\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ より $y>\dfrac{35}{2}$ であるので，$y=18$ のとき $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{y}$ は最大値 $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{25}{126}$ をとる．

$x=8$ のとき，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ より $y>\dfrac{40}{3}$ であるので，$y=14$ のとき $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{y}$ は最大値 $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{14}=\dfrac{11}{56}$ をとる．

$x=9$ のとき，$\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ より $y>\dfrac{45}{4}$ であるので，$y=12$ のとき $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{y}$ は最大値 $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{7}{36}$ をとる．

$x=10$ のとき，$\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ より $y>10$ であるので，$y=11$ のとき $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{y}$ は最大値 $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}=\dfrac{21}{110}$ をとる.

$x \geqq 11$ のとき，$y \geqq x$ であるので，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{11}=\dfrac{2}{11}$ となる.

　また，$x \geqq y$ のときも同様である.

　以上より求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{37}{186}}$〔$(x,\ y)=(6,\ 31),\ (31,\ 6)$ のとき〕

第40講　複数の変数の取り扱い

40 次の各問いに答えよ．

(1) 点 $(x,\ y)$ が

$$x+4\geqq 0,\quad x+y\leqq 6,\quad x+2y\geqq -4,\quad x-y\leqq 2$$

で表される領域内を動くとき，$f(x,\ y)=x^2-10x+4y$ の最小値を求めよ．

(2) 点 $(x,\ y,\ z)$ が

$$1\leqq x\leqq 3,\quad 1\leqq y\leqq 3,\quad 1\leqq z\leqq 3,\quad x+y+z\leqq 6$$

で表される領域内を動くとき，$f(x,\ y,\ z)=xyz$ の最大値を求めよ．

【答】 (1) -17（$x=3$，$y=1$ のとき） (2) 8（$x=y=z=2$ のとき）

【解答】

(1) $x+4\geqq 0$，$x+y\leqq 6$，$x+2y\geqq -4$，$x-y\leqq 2$ より，

$-4\leqq x\leqq 0$ のときは $-\dfrac{1}{2}x-2\leqq y\leqq -x+6$，$0<x\leqq 4$ のときは $x-2\leqq y\leqq -x+6$

と表せるので，$x=k$（定数）とおくと

(Ⅰ) $-4\leqq k\leqq 0$ のとき，$-\dfrac{1}{2}k-2\leqq y\leqq -k+6$ となり，$f(k,\ y)=k^2-10k+4y$ は y の1次関数であるので，y に関する最小値は

$f\left(k,\ -\dfrac{1}{2}k-2\right)=k^2-10k+4\left(-\dfrac{1}{2}k-2\right)=(k-6)^2-44$ となる．

(Ⅱ) $0<k\leqq 4$ のときは $k-2\leqq y\leqq -k+6$ となり，$f(k,\ y)=k^2-10k+4y$ は y の1次関数であるので，y に関する最小値は

$f(k,\ k-2)=k^2-10k+4(k-2)=(k-3)^2-17$ となる．

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，y に関する最小値は

$$\begin{cases}(k-6)^2-44 & (-4\leqq k\leqq 0\text{ のとき})\\(k-3)^2-17 & (0<k\leqq 4\text{ のとき})\end{cases}$$

となるので，求める最小値は $k=3$ のとき -17 である．このとき $y=k-2=1$ であるので，$x=3$，$y=1$ のとき最小値 -17

(2) $z=k$（定数）とすると，与えられた4つの不等式は

$$1\leqq x\leqq 3\quad \cdots①,\ 1\leqq y\leqq 3\quad \cdots②,\ 1\leqq k\leqq 3\quad \cdots③,\ x+y+k\leqq 6\quad \cdots④$$

となる．ここで，④は $y\leqq -x+6-k$ と変形でき，k の範囲③と②を考慮すると

(Ⅰ) $1\leqq k\leqq 2$ のとき，$x=l$（定数）とおくと

$$\begin{cases}1\leqq y\leqq 3 & (1\leqq l\leqq 3-k\text{ のとき})\\1\leqq y\leqq 6-k-l & (3-k<l\leqq 3\text{ のとき})\end{cases}$$

となる．

このとき $f(l,y,k)=kly$ は1次の係数が正の y の1次関数であるので，その最大値 M_1 は

$$M_1=\begin{cases} f(l,\ 3,\ k)=3kl & (1\leqq l\leqq 3-k\ のとき) \\ f(l,\ 6-k-l,\ k)=k(6-k-l)l & (3-k<l\leqq 3\ のとき) \end{cases}$$

となる.

次に，M_1 の最大値を考えるとき，$3k$ は正で

$k(6-k-l)l=-k\left(l-\dfrac{6-k}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}k(6-k)^2$ であり，$3-k<\dfrac{6-k}{2}<3$ より，M_1 の増減は

l	1	$\cdots$	$3-k$	$\cdots$	$\dfrac{6-k}{2}$	$\cdots$	3
M_1'		$+$		$+$	0	$-$	
M_1		↗		↗		↘	

となるので M_1 は $l=\dfrac{6-k}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}k(6-k)^2$ をとる.

(Ⅱ)　$2<k\leqq 3$ のとき，$x=l$（定数）とおくと $1\leqq y\leqq 6-k-l$ となる.

このとき $1\leqq 6-k-l$ より $l\leqq 5-k$ であり，$f(l,\ y,\ k)=kly$ は１次の係数が正の y の１次関数であるので，その最大値 M_2 は

$$\begin{aligned} M_2&=f(l,\ 6-k-l,\ k)=k(6-k-l)l \\ &=-k\left(l-\frac{6-k}{2}\right)^2+\frac{1}{4}k(6-k)^2 \end{aligned}$$

となる.

このとき $1<\dfrac{6-k}{2}<5-k$ であるので，M_2 の最大値も(Ⅰ)と同様 $\dfrac{1}{4}k(6-k)^2$ となる.

以上より $g(k)=\dfrac{1}{4}k(6-k)^2$ とおくと，$g(k)=\dfrac{1}{4}(k^3-12k^2+36k)$ より

$g'(k)=\dfrac{3}{4}(k-2)(k-6)$ となるので，$g(k)$ の増減は

k	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$g'(k)$		$+$		$-$	
$g(k)$		↗	$g(2)$	↘	

よって求める最大値は $g(2)=8$ であり，$k=2$ よりこのとき $x=y=z=2$ である.

第41講　なす角の攻め方

41　xy 平面上で2点を A(0, 2), B(0, 3) とし，t を正の実数とし x 軸上の点を P(t, 0) とする．∠APB$=\theta$ とするとき，θ が最大となるような実数 t の値と，そのときの θ の余弦を求めよ．

【答】　$t=\sqrt{6}$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

【解答】

原点Oに対し，∠APO$=\alpha$，∠BPO$=\beta$ とおくと $\tan\beta=\dfrac{3}{t}$，$\tan\alpha=\dfrac{2}{t}$ であり，$\theta=\beta-\alpha$ より

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{\dfrac{3}{t}-\dfrac{2}{t}}{1+\dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{2}{t}}=\frac{1}{t+\dfrac{6}{t}}$$

ここで，$t>0$，$6t>0$ より，相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$t+\frac{6}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{6}{t}}=2\sqrt{6}$$

が成り立つ．等号は $t=\dfrac{6}{t}$ したがって $\boldsymbol{t=\sqrt{6}}$ のとき成立する．

よって

$$\tan\theta=\frac{1}{t+\dfrac{6}{t}}\leqq\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

より θ が最大になるときの余弦は $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{24}+1}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}$

第 42 講　偶関数，奇関数，対称移動

42　次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ平行移動した曲線は $y=f(x-\alpha)+\beta$ となることを示せ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ を直線 $x=p$ に関して対称移動した曲線は $y=f(2p-x)$ となることを示せ．また，曲線 $y=f(x)$ を点 $(p,\ q)$ に関して対称移動した曲線は $y=-f(2p-x)+2q$ となることを示せ．

(3)　偶関数と奇関数の積は奇関数になることを示せ．また，奇関数と奇関数の積は偶関数になることを示せ．

(4)　4 次関数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$（a，b，c，d，e は実数の定数）に関して，$y=f(x)$ が直線 $x=p$ に関して対称なグラフをもつとするとき，2 つの 2 次関数 $g(x)$ と $h(x)$ を用いて $f(x)=g(h(x))$ と表せることを示せ．

【答】　略

【解答】

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ を x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ平行移動した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$x+\alpha=X,\ y+\beta=Y$$

が成り立つ．ここで $(x,\ y)=(X-\alpha,\ Y-\beta)$ を $y=f(x)$ に代入すると

$$Y-\beta=f(X-\alpha)$$

$$Y=f(X-\alpha)+\beta$$

となる．よって $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ平行移動した曲線は $y=f(x-\alpha)+\beta$ となる．

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ を直線 $x=p$ に関して対称移動した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$\frac{x+X}{2}=p,\ y=Y$$

が成り立つ．ここで $(x,\ y)=(2p-X,\ Y)$ を $y=f(x)$ に代入すると

$$Y=f(2p-X)$$

となる．よって $y=f(x)$ のグラフを直線 $x=p$ に関して対称移動した曲線は $y=f(2p-x)$ となる．

また曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ を点 $(p,\ q)$ に関して対称移動した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$\frac{x+X}{2}=p, \frac{y+Y}{2}=q$$

が成り立つ．ここで $(x,\ y)=(2p-X,\ 2q-Y)$ を $y=f(x)$ に代入すると

$$2q-Y=f(2p-X)$$

となる．よって $y=f(x)$ のグラフを直線 $x=p$ に関して対称移動した曲線は $y=-f(2p-x)+2q$ となる．

(3)　$f(x)$ を偶関数，$g(x)$ を奇関数とし，$h(x)=f(x)g(x)$ と定める．このとき，

$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$ であり

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)\{-g(x)\}=-f(x)g(x)=-h(x)$$

より $h(x)$ は奇関数となる．

　また $f(x)$ と $g(x)$ を奇関数とし，$h(x)=f(x)g(x)$ と定めると，

$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=-g(x)$ であり

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)\{-g(x)\}=f(x)g(x)=h(x)$$

より $h(x)$ は偶関数となる．

(4)　$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x-p)^4+b'(x-p)^3+c'(x-p)^2+d'(x-p)+e'$ と表せる．ただし，$b'=4ap+b$，$c'=6ap^2+3bp+c$，$d'=4ap^3+3bp^2+2cp+d$，$e'=ap^4+bp^3+cp^2+dp+e$ である．

このとき曲線 $y=f(x)$ が直線 $x=p$ に関して対称なグラフをもつので，

$f(p+h)=f(p-h)$ が任意の h に対して成り立つ．

ここで $f(p+h)-f(p-h)=(ah^4+b'h^3+c'h^2+d'h+e')-(ah^4-b'h^3+c'h^2-d'h+e')$

$$=2b'h^3+2d'h$$

より $2b'h^3+2d'h=0$ が h に関する恒等式となるので $b'=d'=0$

　このとき $f(x)=a(x-p)^4+c'(x-p)^2+e'$ となるが，$g(x)=ax^2+c'x+e'$，$h(x)=(x-p)^2$ とおくと，$g(x)$ と $h(x)$ は 2 次関数で，$f(x)=g(h(x))$ と表すことができる．

第 43 講　必要条件からヒントを得る

43　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ とする．すべての整数 n に対して $f(n)$ が整数となるような実数 a，b，c の条件を求めよ．

(2)　$f(x)=x^2+px+q$ とする．すべての自然数 n に対して $f(x^n)$ が $f(x)$ で割り切れるような p と q の値を求めよ．

(3)　$0<\alpha<\beta<2\pi$ とする．

$$\sin x+\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)=0$$

が任意の実数 x について成り立つとき，α と β の値を求めよ．

【答】 (1) $a=\dfrac{k+l}{2}$，$b=\dfrac{k-l}{2}$，$c=m$（k，l，m は整数）

(2) $(p,\ q)=(0,\ 0)$，$(0,\ -1)$，$(-1,\ 0)$，$(-2,\ 1)$　(3) $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$，$\beta=\dfrac{4}{3}\pi$

【解答】

(1)　k，l，m を整数とする．

すべての整数 n に対して $f(n)$ が整数より，

$f(-1)=a-b+c$，$f(0)=c$，$f(1)=a+b+c$ は整数であるので

$$a+b=k\quad\cdots\cdots①,\quad a-b=l\quad\cdots\cdots②,\quad c=m$$

と表せる．①と②より $a=\dfrac{k+l}{2}$，$b=\dfrac{k-l}{2}$ を得る．

このとき

$$f(n)=\frac{k+l}{2}n^2+\frac{k-l}{2}n+m=\frac{n(n+1)}{2}k+\frac{n(n-1)}{2}l+m$$

であるから，n が整数なら n と $n+1$ の一方は偶数となり $n(n+1)$ は偶数，つまり $\dfrac{n(n+1)}{2}$ は整数となる．同様に，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ も整数．

よって $f(n)$ は整数である．

ゆえに求める条件は

$$\boldsymbol{a=\frac{k+l}{2},\ b=\frac{k-l}{2},\ c=m}\ \textbf{（}\boldsymbol{k,\ l,\ m}\ \textbf{は整数）}$$

(2)　すべての自然数 n に対して $f(x^n)$ が $f(x)$ で割り切れるので，$f(x^2)$ も $f(x)$ で割り切れる．ここで

$$\begin{aligned}f(x^2)&=x^4+px^2+q\\&=f(x)(x^2-px+p^2+p-q)+p(-p^2-p+2q)x+q(-p^2-p+q+1)\end{aligned}$$

であるから，

$p(-p^2-p+2q)=0$ かつ $q(-p^2-p+q+1)=0$ となるので

$$\begin{cases}p=0\\q=0\end{cases},\quad\begin{cases}p=0\\-p^2-p+q+1=0\end{cases},\quad\begin{cases}-p^2-p+2q=0\\q=0\end{cases},\quad\begin{cases}-p^2-p+2q=0\\-p^2-p+q+1=0\end{cases}$$

これらより $(p,\ q)=(0,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (-2,\ 1),\ (1,\ 1)$

$p=q=0$ のとき，$f(x)=x^2$ より $f(x^n)=x^{2n}=x^2\cdot x^{2n-2}$ となるので $f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる．

$p=0,\ q=-1$ のとき，$f(x)=x^2-1$ より

$f(x^n)=x^{2n}-1=(x^2-1)(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots\cdots+x^2+1)$ となるので，$f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる．

$p=-1,\ q=0$ のとき，$f(x)=x^2-x$ より

$f(x^n)=x^{2n}-x^n=(x^2-x)\cdot x^{n-1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)$ となるので，$f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる．

$p=-2,\ q=1$ のとき，$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ より

$f(x^n)=(x^n-1)^2=(x-1)^2(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)^2$ となるので，$f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる．

$p=q=1$ のとき，$f(x)=x^2+x+1$ より

$f(x^3)=x^6+x^3+1=(x^2+x+1)(x^4-x^3+2x-2)+3$ となるので $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れない．

以上より求める p と q は $\boldsymbol{(p,\ q)=(0,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (-2,\ 1)}$

(3)　与式に $x=0$ を代入すると $\sin 0+\sin(0+\alpha)+\sin(0+\beta)=0$

ゆえに $\sin\alpha+\sin\beta=0$　……①

$x=\frac{\pi}{2}$ を代入して $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=0$

ゆえに $\cos\alpha+\cos\beta=-1$　……②

①より $\sin\beta=-\sin\alpha$，②より $\cos\beta=-1-\cos\alpha$　……③

これらを $\sin^2\beta+\frac{\cos}{2}\beta=1$ に代入すると

$(-\sin\alpha)^2+(-1-\cos\alpha)^2=1$ より $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ となる．この結果と③より

$\cos\beta=-\frac{1}{2}$ となるが，$0<\alpha<\beta<2\pi$ より $\alpha=\frac{2}{3}\pi,\ \beta=\frac{4}{3}\pi$ に決まる．

$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\ \beta=\frac{4}{3}\pi$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\sin x+\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)\\
&=\sin x+\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+\sin\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)\\
&=\sin x+\left(\sin x\cos\frac{2}{3}\pi+\cos x\sin\frac{2}{3}\pi\right)+\left(\sin x\cos\frac{4}{3}\pi+\cos x\sin\frac{4}{3}\pi\right)\\
&=0
\end{aligned}
$$

となるので，求める α と β は $\boldsymbol{\alpha=\frac{2}{3}\pi,\ \beta=\frac{4}{3}\pi}$

第 44 講　二項係数

44　二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$（n は自然数，k は整数で $0\leqq k\leqq n$）に関して，次の各問いに答えよ．

(1)　${}_n\mathrm{C}_k+{}_n\mathrm{C}_{k+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$ $(0\leqq k\leqq n-1)$ を示せ．また，$k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ $(1\leqq k\leqq n)$ を示せ．

(2)　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．
また，${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}{}^2+{}_n\mathrm{C}_n{}^2$ を簡単にせよ．

(3)　${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+(n-1){}_n\mathrm{C}_{n-1}+n{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

(4)　${}_n\mathrm{C}_0+\dfrac{1}{2}{}_n\mathrm{C}_1+\dfrac{1}{3}{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}{}_n\mathrm{C}_{n-1}+\dfrac{1}{n+1}{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

【答】 (1) 略　(2) 順に 2^n，$\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$　(3) $n2^{n-1}$　(4) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

【解答】

(1)　${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ より

$$\begin{aligned}&{}_n\mathrm{C}_k+{}_n\mathrm{C}_{k+1}-{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\{n-(k+1)\}!}-\frac{(n+1)!}{(k+1)!\{(n+1)-(k+1)\}!}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}-\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\&=\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\{(k+1)+(n-k)-(n+1)\}=0\end{aligned}$$

となるので ${}_n\mathrm{C}_k+{}_n\mathrm{C}_{k+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$ である．

また

$$\begin{aligned}k{}_n\mathrm{C}_k-n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}&=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}-n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}\\&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}-\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=0\end{aligned}$$

となるので $k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ である．

(2)　$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^n-1+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ において $x=1$ を代入することで

${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n=\mathbf{2^n}$ を得る．

また

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^n-1+{}_n\mathrm{C}_nx^n\quad\cdots\cdots①$$

と

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x+{}_n\mathrm{C}_{n-2}x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_1x^n-1+{}_n\mathrm{C}_0x^n\quad\cdots\cdots②$$

の辺々の積をとったときの x^n の係数に注目すると，

$(1+x)^n\cdot(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ の展開式における x^n の係数は ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ であり，

①と②の右辺の積の x^n の係数は ${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}{}^2+{}_n\mathrm{C}_n{}^2$ となるので

$$
{}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}{}^2+{}_nC_n{}^2={}_{2n}C_n
$$
$$
=\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}
$$
$$
=\boldsymbol{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}
$$

(3)　$k{}_nC_k=n{}_{n-1}C_{k-1}$ を用いると

$$
{}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots\cdots+(n-1){}_nC_{n-1}+n{}_nC_n=\sum_{k=1}^{n}k{}_nC_k
$$
$$
=\sum_{k=1}^{n}n{}_{n-1}C_{k-1}
$$
$$
=n\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}C_k
$$
$$
=\boldsymbol{n2^{n-1}}
$$

(4)　$k{}_nC_k=n{}_{n-1}C_{k-1}$ より得られる $\frac{1}{n+1}{}_{n+1}C_{k+1}=\frac{1}{k+1}{}_nC_k$ を用いると

$$
{}_nC_0+\frac{1}{2}{}_nC_1+\frac{1}{3}{}_nC_2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}{}_nC_{n-1}+\frac{1}{n+1}{}_nC_n
$$
$$
=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}{}_nC_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}{}_{n+1}C_{k+1}
$$
$$
=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}{}_{n+1}C_k=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}C_k-{}_{n+1}C_0\right)
$$
$$
=\boldsymbol{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}
$$

第45講　コーシー・シュワルツの不等式

45　次の各問いに答えよ.

(1)　$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leqq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ を示せ.

(2)　x_i, y_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ が実数であるとき

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2\right)$$

を示せ.

(3)　a と b は $a<b$ を満たす実数とするとき

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$$

を示せ.

(4)　$x+y+z+w=1$ を満たす正の実数 x, y, z, w に対して $\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{y}+\dfrac{81}{z}+\dfrac{256}{w}$ の最小値を求めよ.

【答】 (1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) 900 $\left(x=\dfrac{1}{30},\ y=\dfrac{2}{15},\ z=\dfrac{3}{10},\ w=\dfrac{8}{15}\right.$ のとき$)$

【解答】

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, 内積の定義より $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるので

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)\geqq 0$$

より $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \geqq (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ となる.

ここで, 等号は $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)=0$ よって $|\vec{a}|=0$, $|\vec{b}|=0$, $\cos\theta=\pm 1$, つまり $\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ または $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ のとき成り立つ.

(2)　$(x_1, x_2, \cdots, x_3)=(0, 0, \cdots, 0)$ のとき, 明らかに与式は成り立つ.

以下 $(x_1, x_2, \cdots, x_3)\neq(0, 0, \cdots, 0)$ のとき

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

$$=(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)(y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots\cdots+y_n{}^2)-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_i{}^2y_j{}^2+x_j{}^2y_i{}^2)-2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}x_ix_jy_iy_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2 \geqq 0$$

より $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2\right)$ は示された.

等号成立は $1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての i, j について $x_iy_j=x_jy_i$ となるとき, つまり実数 k を用いて $(y_1, y_2, \cdots, y_n)=k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と表せるときである.

(3)　$f(x)$ が定数関数 0 の場合には明らかに与式は成り立つ.

以下, $f(x)$ が定数関数 0 でないとする.

このとき $a<b$ より $\displaystyle\int_a^b \{f(x)\}^2 dx>0$ であり, 実数 t に対して常に $\{tf(x)-g(x)\}^2 \geqq 0$

すなわち $t^2\{f(x)\}^2-2tf(x)g(x)+\{g(x)\}^2\geqq 0$ が成り立つ.

区間 $[a,\ b]$ において積分することで

$$\left(\int_a^b\{f(x)\}^2dx\right)t^2-2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)t+\left(\int_a^b\{g(x)\}^2dx\right)\geqq 0$$

が任意の実数 t に関して成り立つことがわかる.

左辺を t の2次関数とみて，それが常に0以上になる条件は，$\displaystyle\int_a^b\{f(x)\}^2dx>0$ より

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-\left(\int_a^b\{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_a^b\{g(x)\}^2dx\right)\leqq 0$$

ゆえに与えられた不等式が成り立つことが示された.

等号成立は $tf(x)-g(x)=0$ がすべての実数 x に関して成り立つ実数 t が存在すること，つまりある実数 t に対して $g(x)=tf(x)$ がすべての x に関して成り立つことである.

(4)　(2)より，実数 $a,\ b,\ c,\ d,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ に関して

$$(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)^2\leqq(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ．等号成立は $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ または

$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)=k(a,\ b,\ c,\ d)$ となる実数 k が存在するときである.

問題文より $xyzw\neq 0$ であるので，①において

$(a,\ b,\ c,\ d)=(\sqrt{x},\ \sqrt{y},\ \sqrt{z},\ \sqrt{w})$，$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ \dfrac{4}{\sqrt{y}},\ \dfrac{9}{\sqrt{z}},\ \dfrac{16}{\sqrt{w}}\right)$

とおける．このとき $x+y+z+w=1$ を用いると

$$\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\cdot\frac{4}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\cdot\frac{9}{\sqrt{z}}+\sqrt{w}\cdot\frac{16}{\sqrt{w}}\right)2$$

$$\leqq\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2+(\sqrt{w})^2\}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{9}{\sqrt{z}}\right)^2+\left(\frac{16}{\sqrt{w}}\right)^2\right\}$$

$$\therefore\quad 900\leqq\frac{1}{x}+\frac{16}{y}+\frac{81}{z}+\frac{256}{w}$$

となる.

ここで，等号が成立する条件は $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)=k(a,\ b,\ c,\ d)$ となる実数 k が存在する，つまり

$$\alpha:a=\beta:b=\gamma:c=\delta:d$$

よって　$\sqrt{x}:\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{y}:\dfrac{4}{\sqrt{y}}=\sqrt{z}:\dfrac{9}{\sqrt{z}}=\sqrt{w}:\dfrac{16}{\sqrt{w}}$

であるので，この式の値を t とおくと $x=t,\ y=4t,\ z=9t,\ w=16t$ となり，これと

$x+y+z+w=1$ より $t=\dfrac{1}{30}$ となる.

以上より，$x=\dfrac{1}{30},\ y=\dfrac{2}{15},\ z=\dfrac{3}{10},\ w=\dfrac{8}{15}$ のとき求める最小値は **900**

第46講　対称性

46 次の各問いに答えよ.

(1) 異なる2つの実数 α, β が

$$\alpha^3-3\alpha=\beta^3-3\beta$$

を満たしているとき, α の値の範囲を求めよ.

(2) x, y を実数として

$$y=4x^3-3x,\quad x=4y^3-3y$$

を満たしているとき, 実数の組 $(x,\ y)$ は何組存在するか.

【答】 (1) $-2\leqq\alpha\leqq2$　(2) 9組

【解答】

(1) $\alpha^3-3\alpha=\beta^3-3\beta=t$ とおくと, $\alpha^3-3\alpha-t=0$ かつ $\beta^3-3\beta-t=0$ より, α と β は $x^3-3x-t=0$ の異なる2つの実数解となる.

ここで, $f(x)=x^3-3x$ とおくと $f'(x)=3(x-1)(x+1)$ より $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

となり, $f(x)-t=0$ すなわち $f(x)=t$ が異なる実数解を2つ以上もつ条件は $-2\leqq\alpha\leqq2$ である.

このとき, $f(x)=2$ すなわち $(x+1)^2(x-2)=0$ であることや $f(x)=-2$ すなわち $(x-1)^2(x+2)=0$ となることと, $y=f(x)$ と $y=t$ のグラフの共有点の x 座標を考えると, 求める α の値の範囲は $\boldsymbol{-2\leqq t\leqq2}$ である.

(2) 与式の辺々の差をとると $y-x=4(x^3-y^3)-3(x-y)$ より

$$2(x-y)\{2(x^2+xy+y^2)-1\}=0$$

また与式の辺々の和をとると $y+x=4(x^3+y^3)-3(x+y)$ より

$$4(x+y)\{(x^2-xy+y^2)-1\}=0$$

よって以下の4つの場合を考えればよい.

(Ⅰ) $x-y=0$ かつ $x+y=0$ のとき, $x=y=0$ である.

(Ⅱ) $x-y=0$ かつ $x^2-xy+y^2=1$ のとき, $y=x$ を $x^2-xy+y^2=1$ に代入して $x=\pm1$ よって $x=y=\pm1$ である.

(Ⅲ) $x^2+xy+y^2=\dfrac{1}{2}$ かつ $x+y=0$ のとき, $y=-x$ を $x^2+xy+y^2=\dfrac{1}{2}$ に代入して

$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　よって $(x,\ y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順)

(Ⅳ) $x^2+xy+y^2=\dfrac{1}{2}$ かつ $x^2-xy+y^2=1$ のとき, 辺々の差をとると $2xy=-\dfrac{1}{2}$ ゆえに

$xy=-\dfrac{1}{4}$　これと $x^2-xy+y^2=1$ すなわち $(x+y)^2=3xy+1$ より $x+y=\pm\dfrac{1}{2}$

よって x と y は $\alpha^2 \pm \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4} = 0$ の2解となるので

$$(x,\ y) = \left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4},\ \frac{-1\mp\sqrt{5}}{4}\right),\ \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{4},\ \frac{1\mp\sqrt{5}}{4}\right)\ （複号同順）$$

以上より，求める $(x,\ y)$ の組の個数は **9**

第47講　x の整式を求める

47　$f(x)$ を x の整式とする．次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が

$$f(x^2)=x(x-1)^2f(x)+2x^4+8x^2-4x+4$$

を満たしているとき，$f(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ が

$$f(x^2)=f(x^2-1)+(3x-6)f(x)+4x^2+6x+26$$

を満たしているとき，$f(x)$ を求めよ．

【答】　(1) $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$　(2) $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$

【解答】

(1)　$f(x)$ が定数関数であるとすると，左辺の $f(x^2)$ は定数関数，$x(x-1)2f(x)$ は3次以下，$2x^4+8x^2-4x+4$ は4次であるので，右辺は4次式となる．よって与式が成り立つことはない．

したがって $f(x)$ は1次以上の整式であるので，その次数を $n(\geqq 1)$ として $f(x)=ax^3+bx^3-1+\cdots\cdots(a\neq 0)$ と表すことができる．

このとき

$$(\text{左辺})=a(x^2)^n+b(x^2)^{n-1}+\cdots\cdots$$
$$=ax^{2n}+bx^{2n-2}+\cdots\cdots$$
$$(\text{右辺})=x(x-1)^2(ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots)+2x^4+8x^2-4x+4$$
$$=ax^{n+3}+(-2a+b)x^{n+2}+\cdots\cdots+2x^4+8x^2-4x+4$$

となる．

(I)　$n=1$ のとき，$(\text{左辺})=ax^2+\cdots\cdots$，$(\text{右辺})=(a+2)x^4+\cdots\cdots$ となり最高次の係数が一致することはないので不適．

(II)　$n\geqq 2$ のとき，$(\text{左辺})=ax^{2n}+\cdots\cdots$　で，$n+3>4$ より右辺の最高次の項は ax^{n+3} となるので，$2n=n+3$ より $n=3$　ゆえに $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ と表すことができる．

このとき

$$(\text{左辺})=ax^6+bx^4+cx^2+d$$
$$(\text{右辺})=x(x-1)^2(ax^3+bx^2+cx+d)+2x^4+8x^2-4x+4$$
$$=ax^6+(-2a+b)x^5+(a-2b+c+2)x^4+(b-2c+d)x^3$$
$$+(c-2d+8)x^2+(d-4)x+4$$

となることから，これらの式が x に関する恒等式になるので

$0=-2a+b$，$b=a-2b+c+2$，$0=b-2c+d$，$c=c-2d+8$，$0=d-4$，$d=4$

を得る．これらと $a\neq 0$ をすべて同時に満たすものは $a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$ となる．

以上より求める関数は $\boldsymbol{f(x)=x^3+2x^2+3x+4}$

(2)　(Ⅰ)　$f(x)$ が定数関数であるとすると，左辺の $f(x^2)$ は定数関数，

$f(x^2-1)+(3x-6)f(x)$ は1次以下，$4x^2+6x+26$ は2次であるので，右辺は2次式となる．よって与式が成り立つことはない．

(Ⅱ)　$f(x)$ が1次関数，つまり $f(x)=ax+b(a\neq 0)$ のとき

$$(\text{左辺})=ax^2+b$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=a(x^2-1)+b+(3x-6)(ax+b)+4x^2+6x+26\\&=(4a+4)x^2+(-6a+3b+6)x+(-a-5b+26)\end{aligned}$$

となり，これらが x に関する恒等式になるので，

$a=4a+4$，$0=-6a+3b+6$，$b=-a-5b+26$ となるが，これらを同時に満たす a と b は存在しない．

(Ⅲ)　$f(x)$ が2次関数，つまり $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ のとき

$$(\text{左辺})=ax^4+bx^2+c$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\{a(x^2-1)^2+b(x^2-1)+c\}+(3x-6)(ax^2+bx+c)+4x^2+6x+26\\&=ax^4+3ax^3+(-8a+4b+4)x^2+(-6b+3c+6)x+(a-b-5c+26)\end{aligned}$$

となり，これらが x に関する恒等式になるが，x^3 の係数に注目すると $0=3a$ より $a=0$ となり $a\neq 0$ に矛盾．よって $f(x)$ が2次関数であることはない．

(Ⅳ)　$f(x)$ が3次関数，つまり $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　$(a\neq 0)$ のとき

$$(\text{左辺})=ax^6+bx^4+cx^2+d$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\{a(x^2-1)^3+b(x^2-1)^2+c(x^2-1)+d\}\\&\qquad+(3x-6)(ax^3+bx^2+cx+d)+4x^2+6x+26\\&=ax^6+bx^4+(-6a+3b)x^3+(3a-8b+4c+4)x^2\\&\qquad(-6c+3d+6)x+(-a+b-c-5d+26)\end{aligned}$$

となり，これらが x に関する恒等式になるので

$$0=-6a+3b,\ c=3a-8b+4c+4,\ 0=-6c+3d+6,\ d=-a+b-c-5d+26$$

を得る．これらと $a\neq 0$ を同時に満たすものは $a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$ となる．よって $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$

(Ⅴ)　$f(x)$ を4次以上の関数，つまり $n\geqq 4$ を満たす n を用いて

$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots$　$(a\neq 0)$ と表せるとき，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=a(x^2)^n+b(x^2)^{n-1}+\cdots\cdots\\&=ax^{2n}+bx^{2n-2}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\{a(x^2-1)^n+b(x^2-1)^{n-1}+\cdots\cdots\}+(3x-6)(ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots)\\&\qquad+4x^2+6x+26\\&=\{ax^{2n}+(-an+b)x^{2n-2}+\cdots\cdots\}+\{3ax^{n+1}+(-6a+3b)x^n+\cdots\cdots\}\\&\qquad+4x^2+6x+26\end{aligned}$$

となるが，$(2n-2)-(n+1)=n-3>0$，$(n+1)-2=n-1>0$ より，右辺を次数の高い項から順に並べると

(右辺)$=ax^{2n}+(-an+b)x^{2n-2}+\cdots+3ax^{n+1}+\cdots\cdots$ となる.

　これが左辺と恒等的に等しいので，x^{2n-2} の係数に注目すると $b=-an+b$ より $an=0$ となるが，これは $a\neq0$，$n\geqq4$ に矛盾.

　よって $f(x)$ が4次以上の整式になることはない.

以上より求める関数は $\boldsymbol{f(x)=x^3+2x^2+3x+4}$

第 48 講　身の回りの数学

48　次の各問いに答えよ．

(1)　楽器の中には弦を振動させて音を出すものがたくさんある．現代のある規約では，弦が１秒あたりに振動する回数（つまり周波数，単位は Hz）により音階が定められている．表はその規約の一例である．

音階	周波数 (Hz)	440 Hz を１としたときの比
ラ	440.0000	1.000000
ラ♯	466.1638	1.059463
シ	493.8833	1.122462
ド	523.2511	1.189207
ド♯	554.3653	1.259921
レ	587.3295	1.334840
レ♯	622.2540	1.414214
ミ	659.2551	1.498307
ファ	698.4565	1.587401
ファ♯	739.9888	1.681793
ソ	783.9909	1.781797
ソ♯	830.6094	1.887749
ラ	880.0000	2.000000

また，弦の材質が均質である場合にはその長さに反比例して周波数（つまり音階）が定まるようになっている．

具体的には，弦の長さが半分になれば，周波数は２倍になり，音階は１オクターブ高い音になる，ということである．また，表のように音が１つずつ高くなる場合には周波数が $\sqrt[12]{2}=1.05946\cdots$ 倍になることも知られている．

今，２点 O(0, 0) と A(1, 0) の両端に弦が張ってあり，この弦を振動させるとドの音が出るとする．

実数 x は $0\leqq x\leqq 1$ を満たすとし，点 P$(x,\ 0)$ に対し弦 AP を振動させる場合を考え，P が O から出発して A に移動する場合，n 番目のソの音は x がいくつのときになるか求めよ．

ただし，必要であれば，$r=\sqrt[12]{2}=1.05946\cdots$ を用いて答えよ．

(2)　炭素 14 のような放射性元素は，さまざまな物質を放出しながら安定な元素に変化している．その変化の仕方は，ある決まった期間（これを半減期という）を経るとその物質の量が半分になるという．例えば，炭素 14 の半減期は約 5730 年であるので，100 g の炭素 14 が密封された容器に入っている場合，5730 年後には炭素 14 が 50 g になり，11460 年後には 25 g になり，残りはすべて窒素 14 に変化するということになっている．

ここで，密封された容器の中にある放射性物質 100 g があり，その半減期が 1000 年で

あるとするとき，この物質が 20 g になるのは何年後かを求めよ．ただし，必要であるならば $\log_{10}2=0.3010$ を用い，小数第１位を四捨五入して答えよ．

(3)　空に輝く星までの距離を計測するため，ある星に関して太陽との角度を測ってみた．ある日，地球上のある場所から太陽と星の角度を測ると角度は θ であった．それからちょうど半年後，つまり最初の観測から地球が太陽の反対側に到達したときに同じ場所で太陽と星の角度を測ると $\pi-\theta-\alpha$ であった．地球は，太陽を中心とする半径 R の円周上を動き太陽と星は動かないものとし，最初の観測時の地球と星との距離を d とするとき，d を R，θ，α を用いて表せ．

【答】 (1) $1-\dfrac{1}{r^7 2^{n-1}}$　(2) 2322 年後　(3) $d=\dfrac{2R\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha}$

【解答】

(1)　表により，ドからソへは７つ音が離れているので，$\mathrm{AP}=\left(\dfrac{1}{r}\right)^7$ ……①となる．また，表により，１オクターブ高い音は周波数が２倍であるので，最初のソの場所から１オクターブ高いソまでは長さが半分になっている．よって n 番目のソは①を $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 倍すればよいので $\mathrm{AP}=\left(\dfrac{1}{r}\right)^7\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

　よって $\boldsymbol{x=1-\dfrac{1}{r^7 2^{n-1}}}$

(2)　t 年後の物質の量は $100\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1000}}$ となるので $100\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1000}}=20$ より $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1000}}=\dfrac{20}{100}$

　両辺について底が 10 の対数をとると $\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1000}}=\log_{10}\dfrac{20}{100}$ より

$-\dfrac{t}{1000}\log_{10}2=\log_{10}2-1$

　よって $t=\dfrac{1000(1-\log_{10}2)}{\log_{10}2}=\dfrac{1000(1-0.3010)}{0.3010}=2322.2\cdots$

　ゆえに **2322 年後**

(3)　最初の観測地点を E，半年後の観測地点を F，ある星を P とすると $\mathrm{EP}=d$，$\mathrm{EF}=2R$，$\angle\mathrm{PEF}=\theta$，$\angle\mathrm{PFE}=\pi-\theta-\alpha$ より正弦定理を用いると $\dfrac{\sin\alpha}{2R}=\dfrac{\sin(\pi-\theta-\alpha)}{d}$

　よって $\boldsymbol{d=\dfrac{2R\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha}}$

練習問題解答

第25講　円と放物線の関係

25　座標平面上で1つの円が放物線 $y=x^2$ に右側から接し，かつ x 軸に上から接している．放物線との接点Aの x 座標を $a\ (>0)$ とするとき，円の中心Cの座標を求めよ．

ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で両者が共有点をもち，かつその点における両者の接線が一致することをいう．

【選択肢】

㋐ $C\left(\dfrac{a(1+\sqrt{4a^2+1})}{2},\ \dfrac{a^2\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$　㋑ $C\left(\dfrac{1+\sqrt{4a^2+1}}{2},\ \dfrac{a\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$

㋒ $C\left(\dfrac{a^2(1+\sqrt{4a^2+1})}{2},\ \dfrac{a^4\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$

【答】 ㋐

【解答】

$y'=2x$ より点 $A(a,\ a^2)$ における接線 l は

$$l:y=2a(x-a)+a^2 \qquad \therefore\quad y=2ax-a^2$$

よって l と x 軸との交点をDとすると，$D\left(\dfrac{1}{2}a,\ 0\right)$

ここで

$$AD=\frac{1}{2}a\sqrt{4a^2+1}$$

より，円と x 軸との接点をBとおくと

$$\overrightarrow{DB}=\left(\frac{1}{2}a\sqrt{4a^2+1},\ 0\right)$$

また $\angle CDB=\theta$ とおくと

$$\tan 2\theta=2a$$

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=2a \qquad \therefore\quad a\tan^2\theta+\tan\theta-a=0$$

$\tan\theta>0$ より

$$\tan\theta=\frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2a}$$

よって

$$\begin{aligned}BC&=DB\cdot\tan\theta\\&=\frac{1}{2}a\sqrt{4a^2+1}\cdot\frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2a}=\frac{\sqrt{4a^2+1}\,(\sqrt{4a^2+1}-1)}{4}\\&=\frac{a^2\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{C\left(\frac{a(1+\sqrt{4a^2+1})}{2},\ \frac{a^2\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)}$$

第 26 講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

26 円 $x^2+y^2=9$ を C_1，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ を C_2 とする．次の各問いに答えよ．

(1)　C_1 と C_2 の 2 つの共有点を通る直線の方程式が $6x+2y-15=0$ となるような $(a,\ b)$ を求めよ．

(2)　(1)の 2 つの共有点と原点を通る円の方程式を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$(a,\ b)=\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$　　㋑　$(a,\ b)=(3,\ 1),\ (6,\ 2)$

㋒　$(a,\ b)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (3,\ 1)$

(2)　㋐　$x^2+y^2-\frac{18}{5}x-\frac{6}{5}y=0$　　㋑　$x^2+y^2-\frac{36}{5}x-\frac{12}{5}y=0$

㋒　$x^2+y^2-\frac{9}{5}x-\frac{3}{5}y=0$

【答】 (1)　㋒　(2) ㋐

【解答】

(1)　C_1 と C_2 はそれぞれ

$$x^2+y^2-9=0,\quad x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-4=0$$

と変形できるので

$$(x^2+y^2-9)+k(x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-4)=0\quad (k\text{ は実数定数})$$

の表す図形は C_1 と C_2 の共有点を通る．

ここで，$k=-1$ とすると

$$2ax+2by-(a^2+b^2+5)=0$$

となり，これが $6x+2y-15=0$ と一致するので

$$2a:2b:(a^2+b^2+5)=6:2:15$$

が成り立つ．ここで，$b=t$ とおくと $a=3t$，$a^2+b^2+5=15t$ より

$$(3t)^2+t^2+5=15t$$
$$10t^2-15t+5=0$$
$$5(2t-1)(t-1)=0$$
$$\therefore\quad t=1,\ \frac{1}{2}$$

よって

$$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (3,\ 1)}$$

(2)　円 $x^2+y^2-9=0$ と直線 $6x+2y-15=0$ の 2 つの共有点と点 $(0,\ 0)$ を通る円の方程式を求めればよい．

$$(x^2+y^2-9)+k(6x+2y-15)=0$$

の表す図形が点 (0, 0) を通るとすると

$$-9+k(-15)=0 \qquad \therefore \quad k=-\frac{3}{5}$$

このとき

$$x^2+y^2-9-\frac{3}{5}(6x+2y-15)=0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x^2+y^2-\frac{18}{5}x-\frac{6}{5}y=0}$$

第27講　軌跡・領域の求め方

27　実数 a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，曲線 $y=x^3-3a^2x+a^2$ の極大点と極小点の間にある部分（ただし，極大点，極小点は含まない）が通る範囲を図示せよ．

【答】　略

【解答】

$y'=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$ より，$a>0$ であるので y の増減は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

となり，$x=-a$ のとき極大，$x=a$ のとき極小となる．よって通過する点を $(X,\ Y)$ とおくと，求める領域は

$$\begin{cases} Y=X^3-3a^2X+a^2 & \cdots\cdots① \\ -a<X<a & \cdots\cdots② \\ 0<a<1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

を同時に満たす実数 a が存在するような点 $(X,\ Y)$ の集合である．①より

$$(1-3X)a^2=Y-X^3$$

(I)　$1-3X\neq 0$ すなわち $X\neq\dfrac{1}{3}$ のとき①より

$$a^2=\frac{Y-X^3}{1-3X}$$

となる．このとき

②より　$X^2<a^2$

$$X^2<\frac{Y-X^3}{1-3X}$$

$$\begin{cases} 1-3X>0 \quad かつ \quad X^2(1-3X)<Y-X^3 \\ 1-3X<0 \quad かつ \quad X^2(1-3X)>Y-X^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y>-2X^3+X^2 \quad かつ \quad X<\dfrac{1}{3} \\ Y<-2X^3+X^2 \quad かつ \quad X>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

③より　$0<a^2<1$

$$0<\frac{Y-X^3}{1-3X}<1$$

$$\begin{cases} 1-3X>0 \quad かつ \quad 0<Y-X^3<1-3X \\ 1-3X<0 \quad かつ \quad 0>Y-X^3>1-3X \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3<Y<X^3-3X+1 \quad かつ \quad X<\dfrac{1}{3} \\ X^3-3X+1<Y<X^3 \quad かつ \quad X>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} -2X^3+X^2<Y<X^3-3X+1 & \left(X<\dfrac{1}{3}\right) \\ X^3-3X+1<Y<-2X^3+X^2 & \left(X>\dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$$

(Ⅱ)　$1-3X=0$ すなわち $X=\dfrac{1}{3}$ のとき

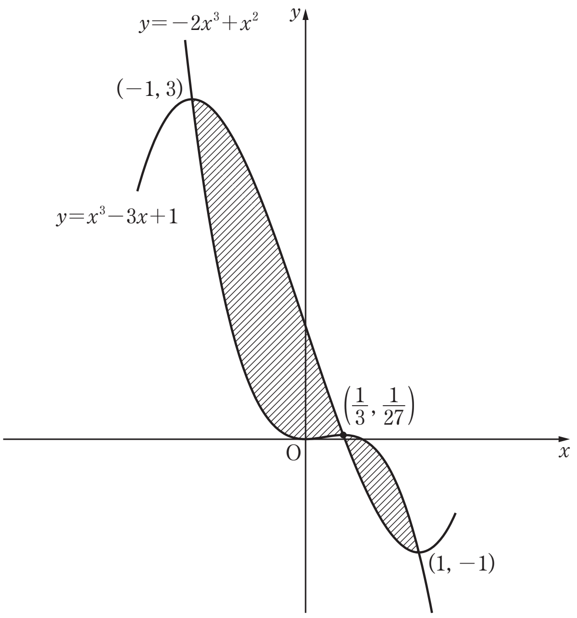
①より　$Y=\dfrac{1}{27}$

②より　$-a<\dfrac{1}{3}<a$

これと ③を同時に満たす a は存在するので

$$(X,\ Y)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{27}\right)$$

以上より求める領域は点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{27}\right)$ 以外の境界を含まない図の斜線部分.



第 28 講　正領域，負領域

28　1 でない実数 t に対して点 $\mathrm{P}(5-2t,\ t)$ と定め，点 $\mathrm{Q}(3,\ 1)$ とし，$C：x^2+y^2=R$ $(R>0)$ とする．次の各問いに答えよ．

(1)　直線 PQ を表す式を求めよ．

(2)　線分 PQ（両端を含む）が円 C の内部に含まれているような R の値の範囲を求めよ．

(3)　線分 PQ（両端を含む）が円 C の周及び内部と共有点をもたないような R の値の範囲を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$x+2y+5=0$　　㋑　$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$　　㋒　$2x-y+5=0$

(2)　㋐　$\begin{cases} R>10 & (1<t\leqq 3) \\ R>5t^2-20t+25 & (t<1,\ t>3) \end{cases}$　　㋑　$\begin{cases} R<10 & (1<t\leqq 3) \\ R<5t^2-20t+25 & (t<1,\ t>3) \end{cases}$

㋒　$\begin{cases} R>10 & (1\leqq t\leqq 3) \\ R>5t^2-20t+25 & (t<1,\ t>3) \end{cases}$

(3)　㋐　$\begin{cases} R>10 & (t<1) \\ R>5t^2-20t+25 & (1<t<2) \\ R>5 & (t\geqq 2) \end{cases}$　　㋑　$\begin{cases} R<10 & (t\geqq 2) \\ R<5t^2-20t+25 & (1<t<2) \\ R<5 & (t<1) \end{cases}$

㋒　$\begin{cases} R<10 & (t<1) \\ R<5t^2-20t+25 & (1<t<2) \\ R<5 & (t\geqq 2) \end{cases}$

【答】　(1) ㋑　(2) ㋐　(3) ㋒

【解答】

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2t-2,\ 1-t)$ より直線 PQ の傾きは $\dfrac{1-t}{2t-2}=-\dfrac{1}{2}$ となるので，直線 PQ の式は

$y=-\dfrac{1}{2}(x-3)+1$ すなわち $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}}$ となる．

(2)　$f(x,\ y)=x^2+y^2-R$ とおくと，$f(0,\ 0)=-R<0$ より，$f(\mathrm{P})=f(5-2t,\ t)<0$ かつ $f(\mathrm{Q})=f(3,\ 1)<0$ となればよい．

$$f(\mathrm{P})=(5-2t)^2+t^2-R=5t^2-20t+25-R<0$$

より $R>5t^2-20t+25$

また

$$f(\mathrm{Q})=3^2+1^2-R=10-R<0$$

より $R>10$

ここで，$(5t^2-20t+25)-10=5(t-1)(t-3)$ より

$$\begin{cases} \boldsymbol{R>10} & \boldsymbol{(1<t\leqq 3)} \\ \boldsymbol{R>5t^2-20t+25} & \boldsymbol{(t<1,\ t>3)} \end{cases}$$

(3)　円 C の中心は (0, 0) であり，この点から直線 PQ へ下ろした垂線の足を H とすると，$\vec{u}=(1,\ 2)$ は PQ $\perp \vec{u}$ で点 (1, 2) は PQ 上であることより，H(1, 2) である．

(Ⅰ)　$5-2t \leqq 1$ すなわち $t \geqq 2$ のとき，点 H は線分 PQ に含まれるので，(2)の $f(x,\ y)$ に対し $f(\mathrm{H}) \leqq f(\mathrm{P})$，$f(\mathrm{H}) < f(\mathrm{Q})$ であることより求める条件は $f(\mathrm{H}) > 0$ である．よって

$$f(\mathrm{H})=1^2+2^2-R>0$$

より $R<5$

(Ⅱ)　$5-2t>1$ すなわち $t<2$ のとき，点 H は線分 PQ に含まれないので，求める条件は $f(\mathrm{P})>0$ かつ $f(\mathrm{Q})>0$ であり，(1)と同様にして

$$\begin{cases} R<10 & (t<1) \\ R<5t^2-20t+25 & (1<t<2) \end{cases}$$

以上より求める R の値の範囲は

$$\begin{cases} \boldsymbol{R<10} & \boldsymbol{(t<1)} \\ \boldsymbol{R<5t^2-20t+25} & \boldsymbol{(1<t<2)} \\ \boldsymbol{R<5} & \boldsymbol{(t \geqq 2)} \end{cases}$$

第29講　リンゴを分ける方法

29　nは正の整数であり，6の倍数であるとする。$1 \leqq t < u < v \leqq n$ かつ $t+u+v=n$ となる整数 t, u, v の組合せは何通りあるか.

【選択肢】

㋐　$\dfrac{1}{12}n^2-n+4$（通り）　㋑　$\dfrac{1}{12}n^2+\dfrac{1}{2}n-5$（通り）

㋒　$\dfrac{1}{12}n^2-\dfrac{1}{2}n+1$（通り）

【答】　㋒

【解答】

$t+u+v=n$ を $(t-1)+(u-1)+(v-1)=n-3$ と考える.

$$\begin{cases} x+y+z=n-3 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \end{cases}$$

を満たす整数解の組み分け方は $n-3$ 個の球を3つの区別のできる箱に入れる入れ方と同じであるとし，それは○が $n-3$ 個と×が2個の並べ方と同じでもあるから

$${}_{n-1}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\ （通り）$$

これが

$$\begin{cases} t+u+v=n \\ t \geqq 1,\ u \geqq 1,\ v \geqq 1 \end{cases}$$

を満たす整数解の組数である．ここで $t=u=v$ となるのは

$$t=u=v=\frac{n}{3}$$

の1通り存在し，$t=u$ となるのは

$$(1,\ 1,\ n-2),\ (2,\ 2,\ n-4),\ \cdots\cdots,\ \left(\frac{n}{2}-1,\ \frac{n}{2}-1,\ 2\right)$$

の $\dfrac{n}{2}-1$ 通りであるので $t=u \neq v$ となるのは

$$\left(\frac{n}{2}-1\right)-1=\frac{n}{2}-2\ （通り）$$

$u=v \neq t$, $v=t \neq u$ の場合も同様であるので求める組合せは

$$\left\{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1-3\left(\frac{n}{2}-2\right)\right\} \times \frac{1}{3!}$$

$$=\frac{1}{12}(n^2-6n+12)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{1}{12}n^2-\frac{1}{2}n+1}\ \textbf{（通り）}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　勘違いと条件付き確率

30 ある監獄に A, B, C という 3 人の囚人がいて，それぞれ独房に入れられている．近々 3 人まとめて処刑される予定になっていたが，恩赦が出て 3 人のうち 1 人だけ助かることになった．誰が恩赦になるかは明かされておらず，それぞれの囚人が「私は助かるのか？」と聞いても看守は答えない．

そこで，囚人 A は看守にこう頼んだ．「私以外の 2 人のうち少なくとも 1 人は死刑になるはずだ．その者の名前が知りたい．私のことじゃないんだから教えてくれてもよいだろう？」

すると看守は「B は死刑になる」と教えてくれた．それを聞いた囚人 A は「これで助かる確率が $\dfrac{1}{3}$ から $\dfrac{1}{2}$ に上がった」とひそかに喜んだ．

囚人 A の間違いを指摘せよ．

【答】 略

【解答】 囚人 A が助かるとした場合，囚人 B と囚人 C の両方が死刑になるので，看守が「B が死刑になる」と言う確率は $\dfrac{1}{2}$ と考えられるので，囚人 A が助かり看守が「B は死刑になる」と言う確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$.

囚人 B が助かるとした場合，囚人 A と囚人 C の両方が死刑になるので，看守が「B は死刑になる」ということはない．囚人 B が助かり看守が「B は死刑になる」と言う確率は 0 である．

囚人 C が助かるとした場合，囚人 A と囚人 B の両方が死刑になるので，看守がかならず「B は死刑になる」と言うことになるので，囚人 C が助かり看守が「B は死刑になる」という確率は $\dfrac{1}{3}\times 1=\dfrac{1}{3}$.

以上より，看守が「B は死刑になる」と言った場合の囚人 A と囚人 C の助かる確率が異なっているのに，それを同じだと考えているところが囚人 A の間違いである．

ちなみに…

看守が「B は死刑になる」と言った場合の囚人 A の助かる確率は $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+0+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$ であり，

看守が「B は死刑になる」と言った場合の囚人 C の助かる確率は $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+0+\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3}$ である．

第31講　四面体について

31　半径 r の球面上に4点A，B，C，Dがある．四面体ABCDの各辺の長さは

$$AB=\sqrt{3},\ AC=AD=BC=BD=CD=2$$

を満たしている．このとき r の値を求めよ．

【選択肢】

㋐ $r=\dfrac{\sqrt{11}}{3}$　㋑ $r=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$　㋒ $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【答】 ㋑

【解答】

半径 r の球の中心をOとし，CDの中点をMとおくと，△ABMは1辺が $\sqrt{3}$ の正三角形となる．さらにABの中点をNとすると対称性よりOはMN上に存在する．よって

$$OA^2=ON^2+AN^2 \qquad \therefore\ r=\sqrt{ON^2+\frac{3}{4}} \quad \cdots\cdots①$$

　また△BCDの重心をGとすると△OMGと△BMNが相似であることより

$$OM=\frac{GM\times BM}{MN}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

よって

$$ON=MN-OM=\frac{5}{6}$$

①より

$$r=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{3}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{3}}$$

第 32 講　式の値と実数解条件

32　x の関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ に関して次の各問いに答えよ.

(1)　x がすべての実数値をとるとき，$f(x)$ の値の範囲を求めよ.

(2)　x が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くとき，$f(x)$ の値の範囲を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐　$-\dfrac{1}{6}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$　㋑　$-\dfrac{1}{4}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{3}$　㋒　$-\dfrac{1}{3}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$

(2)　㋐　$\dfrac{1}{4}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{3}$　㋑　$\dfrac{1}{6}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$　㋒　$\dfrac{1}{3}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋒

【解答】

(1)　$f(x)=k$ すなわち　$kx^2-x+3k-1=0$　……①　が実数解をもつような k の条件を求めればよい.

(Ⅰ)　$k=0$ のとき，①は $-x-1=0$ すなわち $x=-1$ という実数解をもつ.

(Ⅱ)　$k\neq 0$ のとき，①の判別式を考えると $(-1)^2-4k(3k-1)\geqq 0$ より $(6k+1)(2k-1)\leqq 0$

よって $-\dfrac{1}{6}\leqq k<0$，$0<k\leqq\dfrac{1}{2}$

(Ⅰ)，(Ⅱ)より $-\dfrac{1}{6}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$　よって求める値域は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{6}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}}$

(2)　(1)と同様に考えて　$kx^2-x+3k-1=0$　……①　が $0\leqq x\leqq 1$ に実数解をもつような k の条件を求めればよい.

(Ⅰ)　$k=0$ のとき，①は $-x-1=0$ すなわち $x=-1$ という実数解をもつが，$0\leqq x\leqq 1$ に適さない.

(Ⅱ)　$k\neq 0$ のとき，①は $x^2+3=\dfrac{1}{k}(x+1)$ となるが，放物線 $y=x^2+3$ の $x=1$ における接線は $y'=2x$ より $y=2(x-1)+4$ すなわち $y=2x+2$ となることと，2 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 3)$ を通る直線の傾きが 3 であることより，$2\leqq\dfrac{1}{k}\leqq 3$ すなわち $\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$

(Ⅰ)，(Ⅱ)より $\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$　よって求める値域は $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}}$

第33講　相加平均と相乗平均

33　相加平均と相乗平均の関係を用いて，次の各問いに答えよ．

ただし，α，β，γ が正のときには「$\alpha+\beta \geqq 2\sqrt{\alpha\beta}$（等号成立は $\alpha=\beta$ のとき）」や「$\alpha+\beta+\gamma \geqq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma$ のとき）」が成り立つことは証明なしに用いてよい．

(1)　$0<x<2$ のとき $x(2-3x)$ の最大値を求めよ．

(2)　$x>0$ のとき $\dfrac{x^3+1}{x}$ の最小値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　最大値 $\dfrac{11}{36}$ $\left(x=\dfrac{1}{6}\text{ のとき}\right)$　㋑　最大値 $\dfrac{1}{4}$ $\left(x=\dfrac{1}{2}\text{ のとき}\right)$

㋒　最大値 $\dfrac{1}{3}$ $\left(x=\dfrac{1}{3}\text{ のとき}\right)$

(2)　㋐　最小値 $\dfrac{9}{2}$ $(x=2\text{ のとき})$　㋑　最小値 $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\text{ のとき}\right)$

㋒　最小値 2 $(x=1\text{ のとき})$

【答】　(1) ㋒　(2) ㋑

【解答】

(1)　$\dfrac{2}{3} \leqq x<2$ のとき，$x(2-3x) \leqq 0$ となる．

$0<x<\dfrac{2}{3}$ のとき，$3x>0$，$2-3x>0$ より，相加平均と相乗平均の関係より

$$3x+(2-3x) \geqq 2\sqrt{3x(2-3x)} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．等号が成立するのは $3x=2-3x$ つまり $x=\dfrac{1}{3}$ のときである．

このとき，①より $1 \geqq \sqrt{3x(2-3x)}$ したがって $1 \geqq 3x(2-3x)$ ゆえに $x(2-3x) \leqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つ．

以上より，求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ $\left(x=\dfrac{1}{3}\text{ のとき}\right)$

(2)　$x>0$ のとき $x^2>0$，$\dfrac{1}{2x}>0$ である．

このとき

$$\frac{x^3+1}{x}=x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x} \geqq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

が成り立つ．等号は $x^2=\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2x}$ つまり $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき成り立つ．

よって求める最小値は $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\text{ のとき}\right)$

第34講　対称式について

34　a，b は実数で

$$a^2+b^2=16,\quad a^3+b^3=44$$

を満たしている．このとき，$a+b$ の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　1　　㋑　2　　㋒　3

【答】　㋑

【解答】

$a+b=p$，$ab=q$ とおくと a と b は $X^2-pX+q=0$ の2つの実数解より

$$p^2-4q\geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

このとき

$$\begin{cases} a^2+b^2=16 \\ a^3+b^3=44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2-2ab=16 \\ (a+b)(a^2+b^2-ab)=44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2-2q=16 & \cdots\cdots② \\ p(16-q)=44 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

ここで②より

$$q=\frac{1}{2}(p^2-16)$$

これを③，①へ代入すると

③より　$p\left\{16-\dfrac{1}{2}(p^2-16)\right\}=44$

$$p^3-48p+88=0$$

$$(p-2)(p^2+2p-44)=0$$

$$\therefore\quad p=2,\ -1\pm3\sqrt{5} \quad \cdots\cdots④$$

①より　$p^2-4\cdot\dfrac{1}{2}(p^2-16)\geqq 0$

$$p^2\leqq 32$$

$$\therefore\quad -4\sqrt{2}\leqq p\leqq 4\sqrt{2} \quad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤より

$$p=2$$

ゆえに

$$a+b=\mathbf{2}$$

第35講　方程式と共役解

35　a, b を実数とし，i を虚数単位，n を自然数とする．$z=a+bi$ に対し，$\overline{z}=a-bi$ と定めるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　α, β を複素数とする．$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$, $\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$ であることを示せ．

(2)　α が実数のとき，$\overline{\alpha}=\alpha$ であることを示せ．

(3)　実数係数の方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ が複素数 z を解にもつとき，$\overline{z}$ も解であることを示せ．

【答】　略

【解答】

(1)　a, b, c, d を実数として，$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ と定めると，$\overline{\alpha}=a-bi$, $\overline{\beta}=c-di$ である．

このとき，$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$ より $\overline{\alpha+\beta}=(a+c)-(b+d)i$ であり，

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i$ より $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ が示された．

また，$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ より

$\overline{\alpha\beta}=(ac-bd)-(ad+bc)i$ であり，

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$ より $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ が示された．

最後に，$\overline{\alpha}=a-bi$ より $\overline{(\overline{\alpha})}=\overline{a-bi}=a-(-b)i=a+bi=\alpha$ である．

(2)　α が実数のとき，$\alpha=a+bi$ において $b=0$ である．

このとき，$\overline{\alpha}=\overline{a+0i}=a-0i=a+0i=\alpha$ である．

(3)　z が $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ の解であるので

$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$

よって

$$\overline{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n}=\overline{0}$$

が成り立つ．

ここで，(1)の結果を用いると

$$\begin{aligned}\overline{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n}&=\overline{z^n}+\overline{a_1z^{n-1}}+\cdots\cdots+\overline{a_{n-1}z}+\overline{a_n}\\&=\overline{z}^n+\overline{a_1}\,\overline{z}^{n-1}+\cdots\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z}+\overline{a_n}\end{aligned}$$

となる．

a_j $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は実数より $\overline{a_j}=a_j$ となるので

$$\overline{z}^n+\overline{a_1}\,\overline{z}^{n-1}+\cdots\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z}+\overline{a_n}=\overline{z}^n+a_1\overline{z}^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n$$

となる．

また $\overline{0}=0$ より $\overline{z}^n+a_1\overline{z}^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n=0$ となる．

ゆえに，$\overline{z}$ も解であることが示された．

第36講　1の n 乗根

36　n を自然数とし

$$S_0=\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k},\qquad S_1=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1},\qquad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}$$

とおく．また，ω を $x^3-1=0$ の1でない解とする．

(1)　$S_0+S_1+S_2$ の値を求めよ．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\omega^k$ の値を求めよ．

(3)　$S_1=S_2$ が成り立つことを示せ．

(4)　S_0 の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　2^{3n}　　㋑　3^n　　㋒　2^n

(2)　㋐　$(-1)^{n-1}$　　㋑　$(-1)^n$　　㋒　$(-2)^n$

(4)　㋐　$S_0=\dfrac{1}{3}\{2^{3n}+2(-1)^n\}$　㋑　$S_0=\dfrac{1}{3}\{2^n+2(-1)^n\}$　㋒　$S_0=\dfrac{1}{5}\{3^n+(-2)^n\}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑　(3) 略　(4) ㋐

【解答】

(1)　$S_0+S_1+S_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k$ である．ここで

$$(1+x)^{3n}=\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_kx^k$$

の両辺に $x=1$ を代入して $2^{3n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k$ を得る．

$$\therefore\quad S_0+S_1+S_2=\mathbf{2^{3n}}$$

(2)　$(1+x)^{3n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_kx^k$ の両辺に $x=\omega$ を代入して

$$(1+\omega)^{3n}=\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\omega^k$$

を得る．ここで $\omega^2+\omega+1=0$ より

$$1+\omega=-\omega^2$$
$$(1+\omega)^{3n}=(-\omega^2)^{3n}=(-1)^n(\omega^3)^{2n}=(-1)^n$$

となるので

$$\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\omega^k=\mathbf{(-1)^n}$$

(3)　与式より

$$S_1=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-(3k+1)}={}_{3n}\mathrm{C}_{3n-1}+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-4}+\cdots\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}=S_2$$

(4)　(1)〜(3)より

$$\begin{cases} S_0+S_1+S_2=2^{3n} \\ S_0+\omega S_1+\omega^2 S_2=(-1)^n \\ S_1=S_2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} S_0+2S_1=2^{3n} & \cdots\cdots① \\ S_0-S_1=(-1)^n & \cdots\cdots② \\ S_1=S_2 \end{cases}$$

($\omega+\omega^2=-1$ より)

①＋2×②より

$$3S_0=2^{3n}+2(-1)^n$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{S_0=\frac{1}{3}\{2^{3n}+2(-1)^n\}}$$

第37講　3次方程式の解の公式について

37　x の3次方程式 $x^3+3x^2-9x+9=0$ を解け．

【選択肢】

㋐　$x=-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$，$\dfrac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

㋑　$x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$，$\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

㋒　$x=-1-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$，$\dfrac{-2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

【答】 ㋒

【解答】

$x^3+3x^2-9x+9=0$ において $x=t-1$ とおくと $x^3+3x^2-9x+9=t^3-12t+20=0$ となる．

　ここで $t^3+u^3+v^3-3tuv=(t+u+v)(t^2+u^2+v^2-tu-uv-vt)$ において $u=2\sqrt[3]{2}$，$v=\sqrt[3]{4}$ とおくと，$t^3+u^3+v^3-3tuv=t^3-12t+20$ であるので，$t^3-12t+20=0$ は $(t+u+v)(t^2+u^2+v^2-tu-uv-vt)=0$ となり，これを t について解くと

$$
\begin{aligned}
t&=-u-v,\ \frac{u+v\pm\sqrt{(u+v)^2-4(u^2+v^2-uv)}}{2}\\
&=-u-v,\ \frac{u+v\pm\sqrt{-3(u-v)^2}}{2}\\
&=-u-v,\ \frac{u+v\pm(u-v)\sqrt{3}\,i}{2}
\end{aligned}
$$

となる．この結果と $x=t-1$ より

$$x=-1-u-v,\ \frac{-2+u+v\pm(u-v)\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x=-1-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \frac{-2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\frac{(2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i}$$

第 38 講　整数問題 Part I

38 a，b は互いに素な自然数とし，m は $1 \leqq m < ab$ を満たす整数とするとき，$ax+by=m$ となる自然数 x と y は複数存在しないことを示せ．
　ただし，a，b が互いに素であるとき，$aj+bk=1$ を満たす整数 j，k が存在することを用いてよい．

【答】　略

【解答】

a，b が互いに素であるとき，$aj+bk=1$ を満たす整数 j，k が存在するので $ajm+bkm=m$ を得る．ここで, $ax+by=m$ となる自然数 x と y が存在した場合, この式と $ajm+bkm=m$ の辺々の差をとると，$a(x-jm)+b(y-km)=0$

すなわち $a(x-jm)=b(-y+km)$ となる．

　ここで，$x-jm$ と $-y+km$ は整数で a，b は互いに素であるので，この式は ab の倍数，つまり整数 l を用いて $a(x-jm)=b(-y+km)=abl$ と表せる．

　よって $(x,\ y)=(bl+jm,\ -al+km)$ を得る．

　このとき，x と y が自然数ならば $bl+jm>0$ かつ $-al+km>0$ となるが，これらより $-\dfrac{jm}{b}<l<\dfrac{km}{a}$ を得る．

　ここで，$\dfrac{km}{a}-\left(-\dfrac{jm}{b}\right)=\dfrac{m(aj+bk)}{ab}=\dfrac{m}{ab}<1$ となるので，$-\dfrac{jm}{b}<l<\dfrac{km}{a}$ を満たす整数 l は多くとも 1 つしか存在しない．

　よって $ax+by=m$ となる自然数 x と y は複数存在しないことが示された．

第 39 講　整数問題 Part II

39　n が相異なる素数 p，q の積，$n=pq$ であるとき，$n-1$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ の最大公約数は 1 であることを示せ.

【答】 略

【解答】

$${}_{pq}\mathrm{C}_p=\frac{pq(pq-1)(pq-2)\cdots\cdots(pq-p+1)}{p!}$$ より

$${}_{pq}\mathrm{C}_p(p-1)!=q(pq-1)(pq-2)\cdots\cdots\{p(q-1)+1\}$$

を得る．ここで

$$pq-\{p(q-1)+1\}=p-1<p$$

より

$$pq-1,\ pq-2,\ \cdots\cdots,\ p(q-1)+1$$

のいずれも p の倍数ではない.

よって「${}_{pq}\mathrm{C}_p$ は p の倍数ではない」 ……①

同様に

$${}_{pq}\mathrm{C}_q(q-1)!=p(pq-1)(pq-2)\cdots\cdots\{(p-1)q+1\}$$

$$pq-\{(p-1)q+1\}=q-1<q$$

より「${}_{pq}\mathrm{C}_q$ は q の倍数ではない」 ……②

また ${}_{pq}\mathrm{C}_1=pq$ より，最大公約数は

$$pq,\ p,\ q,\ 1$$

のいずれかであるが①，②より pq，p，q は最大公約数となれない．よって最大公約数は 1

第 40 講　複数の変数の取り扱い

40　α, β, γ は $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする．このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　㋑ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　㋒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答】 ㋐

【解答】

$\gamma=\pi-\alpha-\beta$ よりこのとき，与えられた条件は $\alpha>0$, $\beta>0$, $\pi-\alpha-\beta>0$ であるから $\alpha>0$, $\beta>0$, $\beta<\pi-\alpha$ となる．ここで $\alpha=k$（定数）とすると $0<\beta<\pi-k$ $(0<k<\pi)$ であり，このとき

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma&=\sin\alpha\sin\beta\sin(\pi-\alpha-\beta)\\&=\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\\&=\sin k\sin\beta\sin(k+\beta)\\&=\frac{\sin k}{2}[\cos\{(k+\beta)-\beta\}-\cos\{(k+\beta)+\beta\}]\\&=\frac{\sin k}{2}\{\cos k-\cos(2\beta+k)\}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで $0<\beta<\pi-k$ より $k<2\beta+k<2\pi-k$ となるので①は $2\beta+k=\pi$ すなわち $\beta=\dfrac{\pi-k}{2}$ のとき最大値

$$\frac{\sin k}{2}\{\cos k-\cos(2\beta+k)\}=\frac{\sin k}{2}(\cos k+1)=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos k)(1+\cos k)^3}\quad\cdots\cdots②$$

をとる．

ここで $t=1+\cos k$ とおくと $0<k<\pi$ より $0<t<2$ であり，$(1-\cos k)(1+\cos k)^3=(2-t)t^3=2t^3-t^4$ よりこの式を $g(t)$ とおくと $g'(t)=2t^2(3-2t)$ であるから $g(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗		↘	

よって②の最大値は $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ となる．

このとき $\cos k=\dfrac{1}{2}$ より $k=\dfrac{\pi}{3}$ であり $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ となるので $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$

以上より求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$ $\left(\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}\text{ のとき}\right)$

第41講　なす角の攻め方

41　3点を A(0, 1)，B($-2t$, $3t$)，C($-t$, $2t$) とする．$0<t<1$ のとき，∠BAC が最大となるような t の値，及びそのときの $\tan\angle\mathrm{BAC}$ の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$t=\dfrac{1}{3}$，$\tan\angle\mathrm{BAC}=1$　㋑　$t=\dfrac{1}{2}$，$\tan\angle\mathrm{BAC}=2$　㋒　$t=\dfrac{1}{6}$，$\tan\angle\mathrm{BAC}=3$

【答】 ㋐

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2t,\ 3t-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-t,\ 2t-1)$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2t)(-t)+(3t-1)(2t-1)=8t^2-5t+1=8\left(t-\dfrac{5}{16}\right)^2+\dfrac{7}{32}>0$ より ∠BAC は鋭角である．よって ∠BAC が最大となるとき，$\tan\angle\mathrm{BAC}$ は最大となる．

ここで $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2t,\ 3t-1)$ より $\tan\beta=\dfrac{3t-1}{-2t}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-t,\ 2t-1)$ より $\tan\gamma=\dfrac{2t-1}{-t}$

とおくと，$0<t<1$ より $\dfrac{2t-1}{-t}-\dfrac{3t-1}{-2t}=\dfrac{1-t}{2t}>0$ であるので

$$\begin{aligned}\tan\angle\mathrm{BAC}&=\tan(\gamma-\beta)=\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta}\\&=\frac{\dfrac{2t-1}{-t}-\dfrac{3t-1}{-2t}}{1+\dfrac{2t-1}{-t}\cdot\dfrac{3t-1}{-2t}}=\frac{-t^2+t}{8t^2-5t+1}\\&=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3t+1}{8t^2-5t+1}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\dfrac{8t^2-5t+1}{3t+1}}\\&=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\dfrac{8}{3}t-\dfrac{23}{9}+\dfrac{32}{9(3t+1)}}=-\frac{1}{8}+\frac{9}{64}\cdot\frac{1}{3t+1+\dfrac{4}{3t+1}-\dfrac{31}{8}}\end{aligned}$$

となる．

このとき $3t+1>0$，$\dfrac{4}{3t+1}>0$ であるので，相加平均・相乗平均の関係より

$$3t+1+\frac{4}{3t+1}\geqq 2\sqrt{(3t+1)\cdot\frac{4}{3t+1}}=4$$

が成り立つ．等号は $3t+1=\dfrac{4}{3t+1}$ よって $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{3}}$ のとき成立する．

このとき，$\tan\angle\mathrm{BAC}$ は最大値 $-\dfrac{1}{8}+\dfrac{9}{64}\cdot\dfrac{1}{4-\dfrac{31}{8}}=\mathbf{1}$ をとる．

第 42 講　偶関数，奇関数，対称移動

42　曲線 $y=f(x)$ を直線 $y=x+1$ に関して対称移動した曲線の方程式を求めよ.

【選択肢】

㋐　$x+1=f(y+1)$　　㋑　$x+1=f(y-1)$　　㋒　$x-1=f(y-1)$

【答】 ㋑

【解答】

曲線 $y=f(x)$ 上の点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ として，直線 $y=x+1$ に関してこの点を対称移動した点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，直線 $y=x+1$ の傾きは 1 より，直線 PQ は y 軸に平行にはならないので，直線 PQ の傾きを m とすると，$m\times 1=-1$ より $m=-1$

よって $\dfrac{Y-q}{X-p}=-1$　ゆえに

$$p+q=X+Y \quad \cdots\cdots①$$

また P と Q の中点 $\left(\dfrac{X+p}{2},\ \dfrac{Y+q}{2}\right)$ が直線 $y=x+1$ 上より $\dfrac{Y+q}{2}=\dfrac{X+p}{2}+1$

ゆえに

$$p-q=-X+Y-2 \quad \cdots\cdots②$$

$\mathrm{P}(p,\ q)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点より $q=f(p)$ を満たすが，この式に①と②より得られた $p=Y-1,\ q=X+1$ を代入すると $X+1=f(Y-1)$

よって求める曲線の方程式は $\boldsymbol{x+1=f(y-1)}$ である.

第 43 講　必要条件からヒントを得る

43　任意の自然数 n に対して，$5\cdot 2^n+(-4)^{n-1}$ をある素数 p で割ったときの余りが常に 1 になるとする．その素数 p を求めよ．

【選択肢】

㋐　$p=2$　　㋑　$p=3$　　㋒　$p=5$

【答】 ㋒

【解答】

$5\cdot 2^n+(-4)^{n-1}=a_n$ とおく．

任意の n に対して a_n-1 は素数 p で割り切れることになる．

$a_1-1=10$，$a_2-1=15$ より，求める素数 p があるとすれば，それは 10 と 15 の最大公約数の 5 に限る．

以下，a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を 5 で割ったときの余りが 1 となることを数学的帰納法により示す．

$a_1=11$，$a_2=16$ である．

k が 1 以上のとき，a_k と a_{k+1} は 5 で割ったときの余りが 1 であると仮定する，つまり整数 l，m を用いて $a_k=5l+1$，$a_{k+1}=5m+1$ であると仮定すると

$$a_{k+2}+2a_{k+1}-8a_k=\{5\cdot 2^{k+2}+(-4)^{k+1}\}+2\{5\cdot 2^{k+1}+(-4)^k\}-8\{5\cdot 2^k+(-4)^{k-1}\}$$
$$=5\cdot 2^k(2^2+2\cdot 2-8)+(-4)^{k-1}\{(-4)^2+2(-4)-8\}=0$$

より $a_{k+2}=-2a_{k+1}+8a_k$ が成り立つが，$a_{k+2}=-2(5m+1)+8(5l+1)=5(8l-2m+1)+1$ より $n=k+2$ のときも，a_n を 5 で割ったときの余りは 1 になる．

以上より，求める p は $\boldsymbol{p=5}$

第 44 講　二項係数

44　$n \geqq 2$ のとき，$1 \cdot 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 2 \cdot 3 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (n-2)(n-1){}_n\mathrm{C}_{n-1} + (n-1)n\,{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

【選択肢】

㋐　$n^2 2^{n-1}$　　㋑　$n(n-1)2^{n-2}$　　㋒　$n(n+1)2^{n+2}$

【答】　㋑

【解答】

$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ を用いると

$$1 \cdot 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 2 \cdot 3 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (n-2)(n-1){}_n\mathrm{C}_{n-1} + (n-1)n\,{}_n\mathrm{C}_n$$
$$= \sum_{k=2}^{n} (k-1)k\,{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=2}^{n} (k-1)n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=2}^{n} (k-1){}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

となり，さらに $(k-1){}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = (n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を用いると

$$n\sum_{k=2}^{n} (k-1){}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=2}^{n} (n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$$
$$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$$
$$= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}\mathrm{C}_{k}$$
$$= \boldsymbol{n(n-1)2^{n-2}}$$

となる．

第45講　コーシー・シュワルツの不等式

45 定積分 $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$ の値が $\dfrac{25}{6}$ より大きいことを示せ.

必要であれば，定数関数0でない2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に関して，$f(x)$ が $g(x)$ の実数定数倍になっていないときには

$$\left(\int_1^2 f(x)g(x)dx\right)^2<\left(\int_1^2\{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_1^2\{g(x)\}^2dx\right)$$

が成り立つことを用いてもよい.

【答】 略

【解答】

$f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ とおくと $f(x)$ は $g(x)$ の実数定数倍になっておらず，2つとも定数関数ではない.

よって

$$\left\{\int_1^2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\right\}^2<\left(\int_1^2(\sqrt{x})^2dx\right)\left\{\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx\right\}\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ.

ここで

$$\left\{\int_1^2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\right\}^2=\left(\int_1^2(x+1)dx\right)^2$$

$$=\left(\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

であり，$\displaystyle\int_1^2(\sqrt{x})^2dx=\int_1^2 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=\frac{3}{2}$ より①は

$$\frac{25}{4}<\frac{3}{2}\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$$

となる. よって $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx>\frac{25}{6}$ が示された.

第46講　対称性

46 次の連立方程式（＊）を考える.

$$（＊）\begin{cases} y=2x^2-1 \\ z=2y^2-1 \\ x=2z^2-1 \end{cases}$$

(1) $(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$ が（＊）の実数解であるとき，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$，$|c|\leqq 1$ であることを示せ.

(2) （＊）は全部で8組の相異なる実数解をもつことを示せ.

【答】 略

【解答】

(1) $|a|>1$ とすると

$$\begin{aligned}|b|-|a|&=|2a^2-1|-|a|\\&>2|a|^2-|a|-1\\&=(2|a|+1)(|a|-1)>0 \qquad \therefore\ |b|>|a|\end{aligned}$$

同様に $|c|>|b|$，$|a|>|c|$　ゆえに $|a|>|c|>|b|>|a|$ となり矛盾.

よって　$|a|\leqq 1$

このとき

$$0\leqq 2a^2\leqq 2 \qquad -1\leqq 2a^2-1\leqq 1$$

より　$|b|\leqq 1$

同様に　$|c|\leqq 1$

(2) $|a|\leqq 1$ より $a=\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおける．よって

$$b=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,\ c=2\cos^2 2\theta-1=\cos 4\theta$$

となり

$$a=2\cos^2 4\theta-1=\cos 8\theta$$

より

$$\begin{aligned}&\cos 8\theta=\cos\theta\\&\cos 8\theta-\cos\theta=0\\&-2\sin\frac{9}{2}\theta\sin\frac{7}{2}\theta=0\end{aligned}$$

ここで $0\leqq\frac{9}{2}\theta\leqq\frac{9}{2}\pi$，$0\leqq\frac{7}{2}\theta\leqq\frac{7}{2}\pi$ より

$$\begin{cases}\frac{9}{2}\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi \\ \frac{7}{2}\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi\end{cases}$$

$$\therefore\quad \theta=0,\ \frac{2}{9}\pi,\ \frac{4}{9}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{8}{9}\pi,\ \frac{2}{7}\pi,\ \frac{4}{7}\pi,\ \frac{6}{7}\pi$$

この角 θ に対して $a=\cos\theta$ は異なる値をとるので（＊）は全部で8組の相異なる実数解をもつ.

第 47 講　x の整式を求める

47　整式 $f(x)$ について恒等式

$$f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$$

が成り立つとする．$f(x)$ を求めよ．

【選択肢】

㋐　$f(x)=x^3-3x^2+2x$　　㋑　$f(x)=x^3+3x^2-2x$　　㋒　$f(x)=x^3+3x^2+2x$

【答】　㋐

【解答】

$f(x)$ が定数関数であるとすると，左辺の $f(x^2)$ は定数関数，$x^3f(x+1)$ は 3 次以下，$-2x^4+2x^2$ は 4 次であるので，右辺は 4 次式となる．よって与式が成り立つことはない．

したがって $f(x)$ は 1 次以上の整式であるので，その次数を n $(\geqq 1)$ として $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots$ $(a\neq 0)$ と表すことができる．このとき

$$\begin{aligned}(左辺)&=a(x^2)^n+b(x^2)^{n-1}+\cdots\cdots\\&=ax^{2n}+bx^{2n-2}+\cdots\cdots\\(右辺)&=x^3\{a(x+1)^n+b(x+1)^{n-1}+\cdots\cdots\}-2x^4+2x^2\\&=ax^{n+3}+(an+b)x^{n+2}+\cdots\cdots-2x^4+2x^2\end{aligned}$$

となる．

(Ⅰ)　$n=1$ のとき，(左辺)$=ax^2+\cdots\cdots$，(右辺)$=(a-2)x^4+\cdots\cdots$　となり最高次の係数が一致することはないので不適．

(Ⅱ)　$n\geqq 2$ のとき，(左辺)$=ax^{2n}+\cdots\cdots$　で，$n+3>4$ より，右辺の最高次の項は ax^{n+3} となるので，$2n=n+3$ より $n=3$　ゆえに $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ と表すことができる．

このとき

$$\begin{aligned}(左辺)&=ax^6+bx^4+cx^2+d\\(右辺)&=x^3\{a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d\}-2x^4+2x^2\\&=ax^6+(3a+b)x^5+(3a+2b+c-2)x^4+(a+b+c+d)x^3+2x^2\end{aligned}$$

となることより，$0=3a+b$，$b=3a+2b+c-2$，$0=a+b+c+d$，$c=2$，$0=d$ を得る．これらと $a\neq 0$ をすべて同時に満たすものは $a=1$，$b=-3$，$c=2$，$d=0$ となる．

以上より求める関数は $\boldsymbol{f(x)=x^3-3x^2+2x}$

第48講　身の回りの数学

48　平らな広場に建っている塔があり，凛太郎君はその高さを調べようとしている．凛太郎君は広場のある地点から塔の最上部を見上げるとその仰角は α であった．そして，塔と θ の角をなす方向に向かって塔を見上げながら進むと，a m 進んだところで仰角は最大となったという．凛太郎君の目の高さが b m であるとき塔の高さを求めよ．ただし α，θ は鋭角とする．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{\tan\alpha}{\sin\theta}a+b$ (m)　㋑ $\dfrac{\tan\alpha}{\cos\theta}a+b$ (m)　㋒ $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\theta}a+b$ (m)

【答】 ㋑

【解答】

以下，長さや距離の単位を m として，単位を省略する．

塔の高さを h とする．最初に塔を見上げた地点から塔までの距離は $\dfrac{h-b}{\tan\alpha}$ となる．

仰角が最大になる地点は，塔から最も近い地点と考えられるので，その地点から見た塔と最初に見上げた地点との角は 90 度になっているので，$\dfrac{h-b}{\tan\alpha}\cos\theta=a$ が成り立つ．

よって求める高さは $\boldsymbol{h=\dfrac{\tan\alpha}{\cos\theta}a+b}$ である．

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。